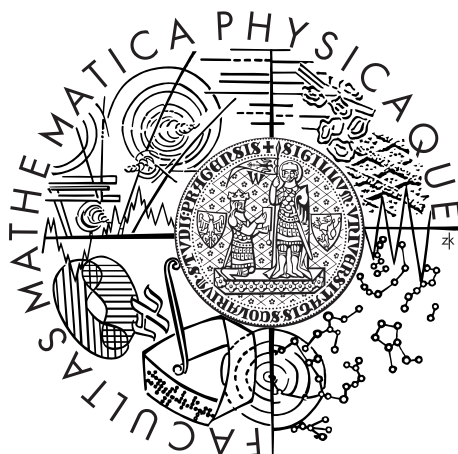


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Oliver Waczulík

## Stochastické modely ve finanční matematice

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2015

Podakovanie:

Rád by som sa poďakoval vedúcemu mojej diplomovej práce doc. RNDr. Janovi Hurtovi, CSc., za odbornú pomoc, usmernenie a čas, ktorý mi venoval. Ďalej moja vďaka patrí zvyšku mojej rodiny za trpezlivosť a pochopenie počas celého môjho štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Stochastické modely ve finanční matematice

Autor: Bc. Oliver Waczulík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt:

Tato práce pojednává o problémech běžných stochastických modelů používaných ve finanční matematice, které jsou často způsobeny nereálnými předpoklady Brownova pohybu, a zabývá se jeho sofistikovanějšími alternativami. Aplikací frakcionálního Brownova pohybu odvozujeme modifikaci Black-Scholesova oceňovacího vzorce pro smíšený frakcionální Brownův pohyb. Aparát Lévyho procesů využíváme na představení subordinovaného stabilního procesu Ornstein-Uhlenbeckova typu sloužícího na modelování úrokových sazeb. Prezентujeme postupy kalibrace těchto modelů spolu se simulační studií metod odhadu Hurstova parametru. Za účelem ilustrace praktického využití modelů obsažených v práci využíváme reálné finanční data a vlastní procedury naprogramované v systému Wolfram Mathematica. Popsaným přístupem se nám podařilo dosáhnout téměř devadesátiprocentního poklesu hodnoty statistiky Kolmogorovova-Smirnovova testu při aplikaci subordinovaného stabilního procesu Ornstein-Uhlenbeckova typu na historické hodnoty měsíční úrokové sazby PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate) ve srovnání s klasickým Vašíčkovým modelem.

Klíčová slova: Frakcionální Brownův pohyb, Lévyho proces, Black-Scholesův model, Ornstein-Uhlenbeckův proces, subordinátor, Hurstův parametr, odhad

Title: Stochastic Models in Financial Mathematics

Author: Bc. Oliver Waczulík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract:

This thesis looks into the problems of ordinary stochastic models used in financial mathematics, which are often influenced by unrealistic assumptions of Brownian motion. The thesis deals with and suggests more sophisticated alternatives to Brownian motion models. By applying the fractional Brownian motion we derive a modification of the Black-Scholes pricing formula for a mixed fractional Brownian motion. We use Lévy processes to introduce subordinated stable process of Ornstein-Uhlenbeck type serving for modeling interest rates. We present the calibration procedures for these models along with a simulation study for estimation of Hurst parameter. To illustrate the practical use of the models introduced in the paper we have used real financial data and custom procedures programmed in the system Wolfram Mathematica. We have achieved almost 90% decline in the value of Kolmogorov-Smirnov statistics by the application of subordinated stable process of Ornstein-Uhlenbeck type for the historical values of the monthly PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate) rates in comparison to the traditional Vašíček model.

Keywords: Fractional Brownian motion, Lévy process, Black-Scholes model, Ornstein-Uhlenbeck process, subordination, Hurst parameter, estimation

Názov práce: Stochastické modely vo finančnej matematike

Autor: Bc. Oliver Waczulík

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Abstrakt:

Táto práca pojednáva o problémoch bežných stochastických modelov používaných vo finančnej matematike, ktoré sú spôsobené často nereálnymi predpokladmi Brownovho pohybu a zaoberá sa jeho sofistikovanejšími alternatívami. Aplikáciou frakcionálneho Brownovho pohybu odvodzujeme modifikáciu Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb. Aparát Lévyho procesov využívame na predstavenie subordinovaného stabilného procesu Ornstein-Uhlenbeckovho typu slúžiaceho na modelovanie úrokových mier. Prezentujeme postupy kalibrácie týchto modelov spolu so simulačnou štúdiou metód odhadu Hurstovho parametra. Za účelom ilustrácie praktického využitia modelov obsiahnutých v práci využívame reálne finančné dáta a vlastné procedúry naprogramované v systéme Wolfram Mathematica. Popísaným prístupom sa nám podarilo dosiahnuť takmer deväťdesiatpercentný pokles hodnoty Kolmogorovovej-Smirnovovej štatistiky pri aplikácii subordinovaného stabilného procesu Ornstein-Uhlenbeckovho typu na historické hodnoty mesačnej úrokovej sadzby PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate) v porovnaní s klasickým Vašíčkovým modelom.

Kľúčové slová: Frakcionálny Brownov pohyb, Lévyho proces, Black-Scholesov model, Ornstein-Uhlenbeck proces, subordinátor, Hurstov parameter, odhad

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Frakcionálny Brownov pohyb</b>	<b>3</b>
1.1 Základné definície a vlastnosti fBm . . . . .	3
1.2 Odhad Hurstovho parametra $H$ . . . . .	7
1.2.1 Hurstova R/S analýza . . . . .	7
1.2.2 DFA odhad Hurstovho parametra . . . . .	11
1.2.3 Odhad Hurstovho parametra založený na periodograme . .	12
1.2.4 Simulácia a porovnanie metód odhadu parametra $H$ . . . .	14
1.3 Frakcionálny Brownov pohyb vo financiách . . . . .	18
1.3.1 Riešenie výskytu arbitráže . . . . .	20
1.3.2 Black-Scholesov oceňovací vzorec pre mfBm . . . . .	22
<b>2 Lévyho procesy</b>	<b>28</b>
2.1 Základné definície a tvrdenia . . . . .	28
2.2 Príklady Lévyho procesov . . . . .	33
2.2.1 Poissonov proces . . . . .	33
2.2.2 Zložený Poissonov proces . . . . .	34
2.2.3 Gamma proces . . . . .	35
2.2.4 Inverzný gausovský proces . . . . .	36
2.3 Subordinátory . . . . .	37
2.3.1 Stabilné subordinátory . . . . .	38
2.4 Modelovanie úrokových mier . . . . .	41
<b>3 Ilustračné príklady</b>	<b>45</b>
3.1 Zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb . . . . .	46
3.2 Modelovanie sadzieb PRIBOR . . . . .	47
<b>Záver</b>	<b>51</b>
<b>Literatúra</b>	<b>52</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>56</b>
<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>58</b>

# Úvod

Táto práca pojednáva o stochastických modeloch používaných vo financiách. V posledných desiatkach rokov sa ich využitie v oceňovaní cenných papierov stalo veľmi populárnym a preferovaným v porovnaní s ich deterministickými alternatívami. Základy, na ktorých budeme budovať, tvorí práca Fishera Blacka a Myrona Scholesa (1973) venovaná oceňovaniu európskych call opcií, spolu s prácou Oldřicha Alfonsa Vašíčka (1977) predstavujúcou model na oceňovanie krátkodobých úrokových mier. Oba tieto modely využívajú Brownov pohyb spolu s jeho často nereálnymi predpokladmi. Viaceré empirické štúdie (viď napríklad Lo, 1991) ukázali, že distribúcie *logaritmických výnosov* finančných aktív vykazujú nadmernú špicatosť, ťažké chvosty, sebedpodobnosť a dlhodobú závislosť. Ďalšia vlastnosť, ktorou sú finančné dáta výnimočné, je takzvané *zhlukovanie volatility*, teda výskyt obdobia s relatívne nízkou intenzitou zmeny (volatility) cien, ktoré nasleduje po období s vysokou intenzitou zmeny cien. V tejto práci sa venujeme riešeniu zmienených problémov pomocou *frakcionálneho Brownovho pohybu* a *Lévyho procesov*.

Štruktúra práce je nasledovná: v prvej kapitole predstavíme *frakcionálny Brownov pohyb* spolu s jeho základnými vlastnosťami. Opíšeme tri základné spôsoby odhadu *Hurstovho parametra*  $H$ , pričom ich efektivitu znázorníme na malej simulačnej štúdii. Záver prvej kapitoly bude venovaný využitiu frakcionálneho Brownovho pohybu vo financiách, problémom, ktoré vznikajú jeho aplikáciou a možnostiam ich riešenia. Odvodíme tiež modifikáciu *Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca*, ktorá túto nadstavbu Brownovho pohybu využíva. V druhej kapitole sa budeme venovať *Lévyho procesom*. Po základných definíciách a vlastnostiach uvedieme pár najpoužívanějších príkladov Lévyho procesov. Ďalej sa sústredíme hlavne na *stabilné rozdelenia* a *subordinátory*, pomocou ktorých vybudujeme nový model na oceňovanie úrokových mier. Tretia kapitola je ilustračná. Modely, ktoré sme navrhli, aplikujeme na reálne finančné dáta.

Text práce predpokladá znalosti teórie pravdepodobnosti, náhodných procesov, štatistiky a základných stochastických modelov, ktoré sa využívajú vo finančnej matematike. Všetky procedúry sú naprogramované v *Sprievodnom dokumente*, ktorý bol napísaný v systéme *Wolfram Mathematica*.



# Kapitola 1

## Frakcionálny Brownov pohyb

V úvode sme spomenuli nevýhody stochastických finančných modelov založených na v praxi často nerealistických predpokladoch Brownovho pohybu. Táto kapitola sa zaoberá jeho zlomkovou nadstavbou: *frakcionálny Brownov pohyb* (*fractional Brownian motion* – skrátene *fBm*) predstavený v práci (Mandelbrot a van Ness, 1968). Uvedieme základné teoretické pojmy, rôzne spôsoby odhadu Hurstovho koeficientu a nakoniec sa budeme venovať jeho aplikácii v stochastických finančných modeloch.

### 1.1 Základné definície a vlastnosti fBm

Začneme predstavením fBm tak, ako je definovaný v knihe (Mishura, 2008). Majme pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Definícia 1.** (*Obojstranný, centrovaný*) frakcionálny Brownov pohyb s Hurstovým parametrom  $H \in (0,1)$  je gausovský proces  $B^H = \{B^H(t), t \in \mathbb{R}\}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s nasledujúcimi vlastnosťami:

1.  $B^H(0) = 0$  skoro určite (skrátene s.u.),
2.  $\mathbb{E}B^H(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\mathbb{E}[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}); t, s \in \mathbb{R}$ .

*Poznámka 1.1.* Pre prírastky  $(B^H(t) - B^H(s)), s, t \in \mathbb{R}$  platí:

$$\text{var}(B^H(t) - B^H(s)) = \mathbb{E}[B^H(t) - B^H(s)]^2 = |t-s|^{2H}.$$

Proces  $B^H$  je gausovský a preto má podľa Kolmogorovej vety *spojitú modifikáciu* (Mishura, 2008).

Nakoľko budeme fBm používať na modelovanie finančných dát, môžeme sa obmedziť len na  $\mathbb{R}_+$ . Pozmeníme preto značenie  $B^H = \{B^H(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ . Uvedme si základné vlastnosti fBm.

**Veta 1.** Pre  $B^H(t), t \in \mathbb{R}_+$  platí:

1.  $B^H(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, t^{2H}),$

2.  $B^H$  má stacionárne prírastky,

3. Pri voľbe  $H = 1/2$  je  $B^H$  (jednostranný, centrováný) Brownov pohyb.

*Dôkaz.* 1.  $B^H$  je gausovský proces, pričom  $\mathbb{E}B^H(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  (definícia 1). Pre jeho rozptyl platí:

$$\text{var} \left( B^H(t) \right) = \mathbb{E} \left[ B^H(t) \right]^2 = \frac{1}{2} \left( t^{2H} + t^{2H} - 0 \right) = t^{2H}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

2. Majme  $B^H(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Pre  $0 \leq s < t < u < v$  platí:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( B^H(t) - B^H(s) \right) \left( B^H(v) - B^H(u) \right) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ B^H(t)B^H(u) \right] + \mathbb{E} \left[ B^H(t)B^H(v) \right] + \mathbb{E} \left[ B^H(s)B^H(u) \right] + \mathbb{E} \left[ B^H(s)B^H(v) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( |t - u|^{2H} + |s - v|^{2H} - |t - v|^{2H} - |s - u|^{2H} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

(Slabá) stacionarita plynie priamo z výsledku 1.1.

3.  $B^H$  je centrováný spojitý gausovský proces, pričom  $B^H(0) = 0$  s.u. pre všetky  $H \in (0, 1)$  (definícia 1, poznámka 1.1). Pri voľbe parametra  $H = 1/2$  majú prírastky  $B^H$  združené normálne rozdelenie. Využitím výsledku 1.1 vidíme, že prírastky sú nekorelované a následne nezávislé. Vzťah:

$$(B^{\frac{1}{2}}(t) - B^{\frac{1}{2}}(s)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, |t - s|),$$

plynie z prvých dvoch bodov dôkazu a vlastností normálneho rozdelenia. Tým je bod 3. dokázaný. □

**Definícia 2** (sebepodobnosť). *Hovoríme, že náhodný proces  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  je sebepodobný s parametrom  $b$ , ak pre každé  $a > 0$  splňuje:*

$$\{X(at), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{a^b X(t), t \in \mathbb{R}\},$$

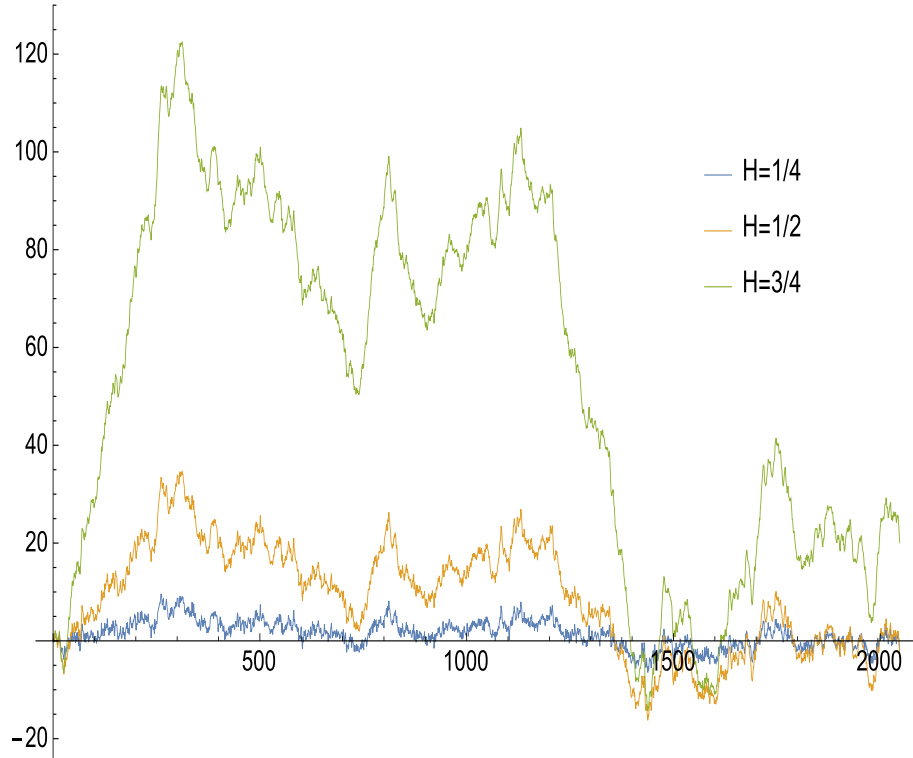
*v zmysle konečne-rozmernej distribúcie.*

Ak sa pozrieme na obrázok 1.1, môžeme si povšimnúť fraktálneho charakteru trajektórií fBm. Nasledujúca veta nám túto vlastnosť upresní.

**Veta 2.** *Frakcionálny Brownov pohyb  $B^H$  je sebepodobný s parametrom  $H$ .*

*Dôkaz.* Pre všetky  $a > 0$ ;  $s, t \in \mathbb{R}$  máme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ B^H(at)B^H(as) \right] &= \frac{1}{2} \left( |at|^{2H} + |as|^{2H} - |at - as|^{2H} \right) \\ &= a^{2H} \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} \right) \\ &= a^{2H} \mathbb{E} \left[ B^H(t)B^H(s) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( a^H B^H(t) \right) \left( a^H B^H(s) \right) \right]. \end{aligned}$$



Obr. 1.1: Trajektórie fBm pre  $H = 1/4$ ,  $H = 1/2$ ,  $H = 3/4$  vytvorené pomocou vstavanej funkcie *FractionalBrownianMotion* systému Wolfram Mathematica.

Všetky vyššie použité procesy sú centrované a gausovské, preto:

$$\{B^H(at), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{a^H B^H(t), t \in \mathbb{R}\}.$$



Z výsledku 1.1 plynie pre  $B^H$ ,  $s < t < u < v$ ,  $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$  nasledovná rovnosť:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( B^H(t) - B^H(s) \right) \left( B^H(v) - B^H(u) \right) \right] &= \\ &= H \int_s^t \left[ (v - y)^{2H-1} - (u - y)^{2H-1} \right] dy = \\ &= (2H - 1)H \int_s^t \int_u^v (x - y)^{2H-2} dx dy. \end{aligned} \quad (1.2)$$

O výbere parametra  $H$  môžeme teda usúdiť nasledovné:

- Pre  $H \in (0, 1/2)$  má fBm záporne korelované prírastky.
- Pre  $H = 1/2$  sa jedná o Brownov pohyb, ktorý má nezávislé prírastky.
- Pre  $H \in (1/2, 1)$  má fBm kladne korelované prírastky.

Simulované trajektórie pre všetky tri prípady sú znázornené na obrázku 1.1.

Jeden z hlavných dôvodov prečo je fBm využívaný vo finančných modeloch je jeho vlastnosť dlhodobej pamäte (anglicky *long-range memory*) pre  $H > 1/2$  (Rostek a Schöbel, 2013), presnejšie dlhodobej závislosti jeho prírastkov. Pre autokovariančnú funkciu  $\gamma(k) = \text{cov}(X_n, X_{n+k})$  náhodnej postupnosti  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  spravidla platí, že pri  $k \rightarrow \infty$  funkcia  $\gamma$  konverguje k nule. Avšak, pre niektoré procesy je tento pokles pomalší než pre ostatné.

**Definícia 3.** *Bud'  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  slabo stacionárna náhodná postupnosť s autokovariančnou funkciou  $\gamma(k) = \text{cov}(X_n, X_{n+k})$ . Hovoríme, že táto rada vykazuje:*

1. *dlhodobú závislosť, ak  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty$ ,*
2. *krátkodobú závislosť, ak  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) < \infty$ .*

Aplikovaním výsledku 1.2 na postupnosť prírastkov frakcionálneho Brownovho pohybu  $X^H = \{B_k^H - B_{k-1}^H\}_{k \in \mathbb{N}}$  (nazývanou tiež *frakcionálny biely šum* – skrátene *fGn*) dostávame:

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \mathbb{E} [X_1^H X_n^H] = \mathbb{E} [B_1^H (B_n^H - B_{n-1}^H)] = \\ &= (2H - 1)H \int_0^1 \int_{n-1}^n (x - y)^{2H-2} dx dy \sim (2H - 1)H n^{2H-2}, \end{aligned}$$

pre  $n \rightarrow \infty$ . Preto:

- Pre  $H > \frac{1}{2}$  dostávame  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty$ ,
- Pre  $H < \frac{1}{2}$  dostávame  $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) < \infty$ .

V kontexte finančných modelov sa preto stačí obmedziť na podmnožinu  $H \in (1/2, 1)$ , kde  $X$  vykazuje dlhodobú pamäť. Niektoré články (Sun, 2013; Xiao a kol., 2012; Cherdito, 2003) sa dokonca sústreďujú na  $H \in (3/4, 1)$ .

Mandelbrot a van Ness v (1968) definovali fBm pomocou stochastického integrálu:

$$\begin{aligned} B^H(r) &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^0 \left( (r - t)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-t)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left( \int_0^r (r - t)^{H-\frac{1}{2}} dB(t) + \int_{-\infty}^0 \left( (r - t)^{H-\frac{1}{2}} - (-t)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(t) \right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Proces 1.3 sa taktiež nazíva *frakcionálny Brownov pohyb typu I*, pričom existuje alternatívna definícia, ktorú voláme *frakcionálny Brownov pohyb typu II*. Nakoľko nechceme v tejto práci zachádzať do hĺbok stochastického kalkulusu, poskytneme aspoň odkaz na prácu, ktorá podrobne popisuje a porovnáva tieto dva typy: (Marinucci a Robinson, 1999).

## 1.2 Odhad Hurstovho parametra $H$

V tejto časti predstavíme najčastejšie používané metódy bodového odhadu Hurstovho parametra  $H$ , menovite metódy založené na *preškálovanom rozpätí* R/S (*rescaled adjusted range*) a *analýze fluktuácie očistenej od trendu* (*detrended fluctuation analysis* – skrátene *DFA*). Ak nás zaujímajú dodatočné informácie o odhade, napríklad asymptotický konfidenčný interval, môžeme využiť odhady založené na *periodograme*. Spomenieme niektoré modifikácie jednotlivých metód, pričom sa zmienime o ich silných a slabých stránkach. Diskusia o vhodnosti ich využitia nás navedie na výber metódy odhadu, ktorú aplikujeme na ilustračný príklad v poslednej kapitole. Pripomeňme si značenie a vzťah, v ktorom sa nachádzajú fBm  $B^H$  a fGn  $X^H$ :

$$X_n^H = B_n^H - B_{n-1}^H, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

$$B_n^H = \sum_{k=0}^n X_k^H, \quad n \in \mathbb{N}, \quad B_0^H = 0. \quad (1.5)$$

Pre jednoduchosť predpokladajme diskrétny čas  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Z definície 1 vyplýva, že  $X^H$  bude tiež centrovany. Použitím výsledku 1.1 dostaneme tvar jeho autokovariančnej funkcie:

$$\gamma_X(k) = \frac{1}{2} \left( (k+1)^{2H} - k^{2H} + |k-1|^{2H} \right), \quad k > 0.$$

V nasledujúcich častiach tejto podkapitoly budeme pracovať s náhodnou postupnosťou  $X = \{X_k\}_{k=1}^n$  a postupnosťou jej čiastočných súm  $Y = \{\sum_{j=1}^k X_j\}_{k=1}^n$ . Nie je komplikované uvedomiť si paralelu medzi týmito postupnosťami a  $X^H$ ,  $B^H$  definovanými vyššie.

### 1.2.1 Hurstova R/S analýza

V časti 1.1 sme ukázali, že fGn vykazuje dlhodobú závislosť pre  $H \in (1/2, 1)$ . Hurstov parameter  $H$  vyjadruje silu tejto závislosti. Pre vyššie hodnoty  $H$  je fBm pravidelnejší s menšími výkyvmi, ako si môžeme všimnúť na obrázku 1.1. Hurst v (1951) využil ako mierku tejto variability rozpätie. Zaveďme si nasledovnú definíciu.

**Definícia 4** (Hurst, 1951). *Majme náhodnú postupnosť  $X = \{X_k\}_{k=1}^n$  a postupnosť jej čiastočných súm  $Y = \{\sum_{j=1}^k X_j\}_{k=1}^n$ . Bud'*

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2},$$

*výberová smerodajná odchýlka, kde  $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_n$  je výberový priemer. Preškálovaným rozpätím  $R_n/S_n$  nazveme:*

$$\frac{R_n}{S_n} = \frac{1}{S_n} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left[ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right] - \min_{1 \leq k \leq n} \left[ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right] \right\}. \quad (1.6)$$

Je zrejmé, že  $0 \leq R_n/S_n$ , presnejšie  $S_n > 0$ ,  $\max[\dots] \geq 0$  a  $\min[\dots] \leq 0$ . Za povšimnutie stojí nasledujúci vzťah:

$$\begin{aligned} R_r &= \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left[ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right] - \min_{1 \leq k \leq n} \left[ Y_k - \frac{k}{n} Y_n \right] \right\} \\ &= \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k X_i - k \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right) \right] - \min_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k X_i - k \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right) \right] \right\} \\ &= \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right] - \min_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Môžeme teda povedať, že čitateľ  $R_n$  je rozpätie čiastočných súm rozdielu  $(X_k - \bar{X}_n)$  pre  $k = 1, \dots, n$ . Uvedomme si, že člen  $\frac{k}{n} Y_n$  predstavuje interpoláciu  $k$ -tej hodnoty dosiahnutú lineárnou interpoláciou medzi  $Y_0 = 0$  a  $Y_n$ . Čitateľ  $R_n$  je rozdiel maximálneho a minimálneho vertikálneho vychýlenia postupnosti  $Y$  od tejto priamky. Preto je  $R_n/S_n$  naozaj miera variability, či fluktuácie  $Y$  normovaná cez výberovú smerodajnú odchýlku.

Edwin Hurst, ktorý sa v práci (Hurst, 1951) venoval skúmaniu prietokov Nílu, zakreslil hodnoty  $R_n/S_n$  proti  $n$  do log-log grafu (takzvaný pox-plot, viď obrázok 1.3). Všimol si, že pre dostatočne veľké  $n$  sa hodnoty R/S štatistiky stabilizujú okolo priamky. Mandelbrot v práci (1975) rozvíja a následne dokazuje tento empirický vzťah. Nasledujúca lema bude uvedená v upravenom tvare, pre jej dôkaz odkazujeme čitateľa na (Mandelbrot, 1975).

**Lema 3** (Mandelbrot, 1975). *Buď  $\{X_t\}_{t=1}^\infty$  taká stacionárna ergodická postupnosť, že  $\{X_t^2\}_{t=1}^\infty$  je ergodická a pre nejaký proces  $B_H(\cdot)$  platí*

$$n^{-H} (Y_{[nt]} - [nt] \mathbb{E} X_1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sigma_X B_H(t) \text{ v } \mathcal{D}[0,1],$$

kde  $\sigma_X^2 = \text{var } X_1 < \infty$  a  $\{Y_t\}_{t=1}^\infty$  je postupnosť čiastočných súčtov  $X$ . Potom

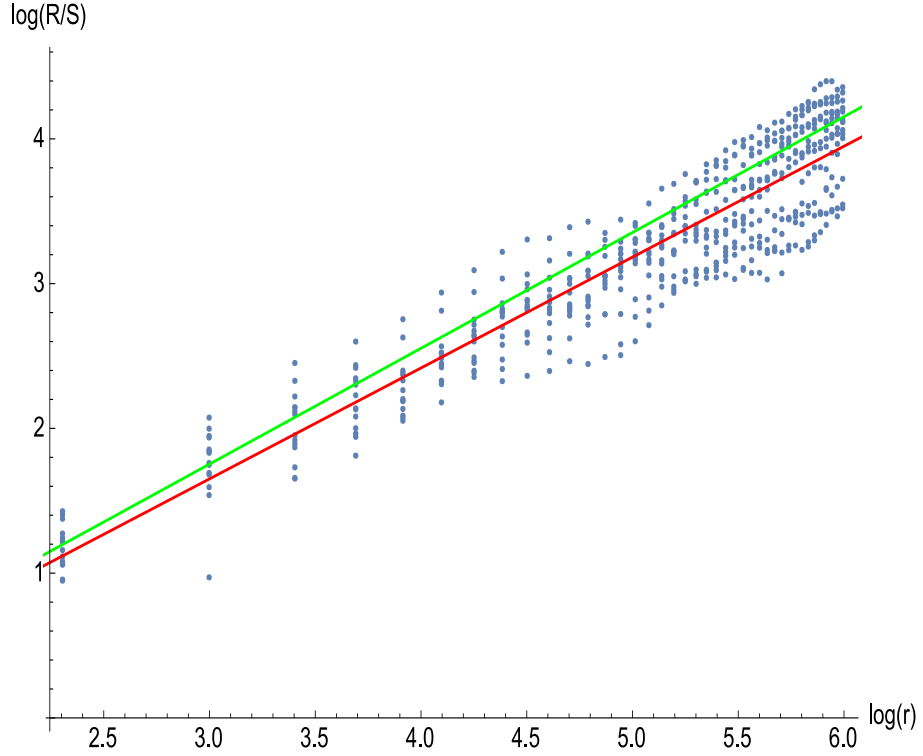
$$Z_n = n^{-H} R_n/S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z := \sup_{t \in [0,1]} (B_H(t) - t B_H(1)) - \inf_{t \in [0,1]} (B_H(t) - t B_H(1)).$$

*Poznámka 1.2.* Pripomeňme, že proces nazveme ergodickým vzhľadom k momentu  $m$ , ak výberový moment  $\hat{m}_T$  z ľubovolnej realizácie tohto procesu dĺžky  $T$  konverguje podľa kvadratického stredy k danému  $m$  pre  $T \rightarrow \infty$ . Teda

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(\hat{m}_T - m)^2] = 0.$$

Vráťme sa späť k 1.7 a uvedomme si, že platí

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right] &= \max_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k X_i - \frac{k}{n} \sum_{j=1}^n X_j + k \mathbb{E} X - n \left( \frac{k}{n} \mathbb{E} X \right) \right] \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - \mathbb{E} X_i) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E} X_i) \right]. \end{aligned}$$



Obr. 1.2: Pox-plot pre odhad parametra  $H$  využitím R/S analýzy na prekrývajúcej sa blokoch pre simuláciu veľkosti  $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad  $\hat{H}_o = 0.7659$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu  $H = 0.8$ .

Analogicky môžeme postupovať v prípade  $\min_{1 \leq k \leq n} \left[ \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right]$ , z čoho plynie súvislosť lemy 3 a R/S analýzy. Ak berieme proces  $X$  z lemy 3 gausovský s vlastnosťou dlhodobej závislosti, potom je  $B_H(\cdot)$  nám dobre známy fBm  $B^H$ . Z lemy 3 dostávame  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$  ( $Z$  je nezávislé od  $n$ ), pričom platí:

$$\log(R_n/S_n) = EZ_n + H \log(n) + (\log(Z_n) - \mathbb{E}Z_n).$$

To nám umožňuje odhadnúť parameter  $H$  pomocou lineárnej regresie aplikovanej na dáta z pox-plotu. Budeme brať do úvahy dve varianty R/S analýzy, založené na voľbe typu blokov.

1. *Odhad  $\hat{H}_o$  na základe prekrývajúcej sa blokov* (tento prístup je ilustrovaný na obrázku 1.2 pre  $n = 2^{11} = 2048$  a  $H = 0.8$ ): vyberme z postupnosti  $X$  podpostupnosť  $\{X_{n_m}\}_{m=1}^M$ , ktorú nazveme postupnosť *počiatočných bodov* a rozdelíme takto  $X$  na  $M$  častí. Následne aplikujeme R/S analýzu z definície 4 na bloky dát  $X_{n_m}, X_{n_m+1}, \dots, X_{n_m+s-1}$  veľkosti  $s$ , pričom  $n_m + s - 1 \leq n$  pre všetky  $m$ . Je zrejmé, že sa tieto bloky môžu prekrývať. Zložky novej  $R/S(n_m, s)$  štatistiky, závisiace na počiatočnom bode  $X_{n_m}$  a veľkosti bloku

s majú tvar:

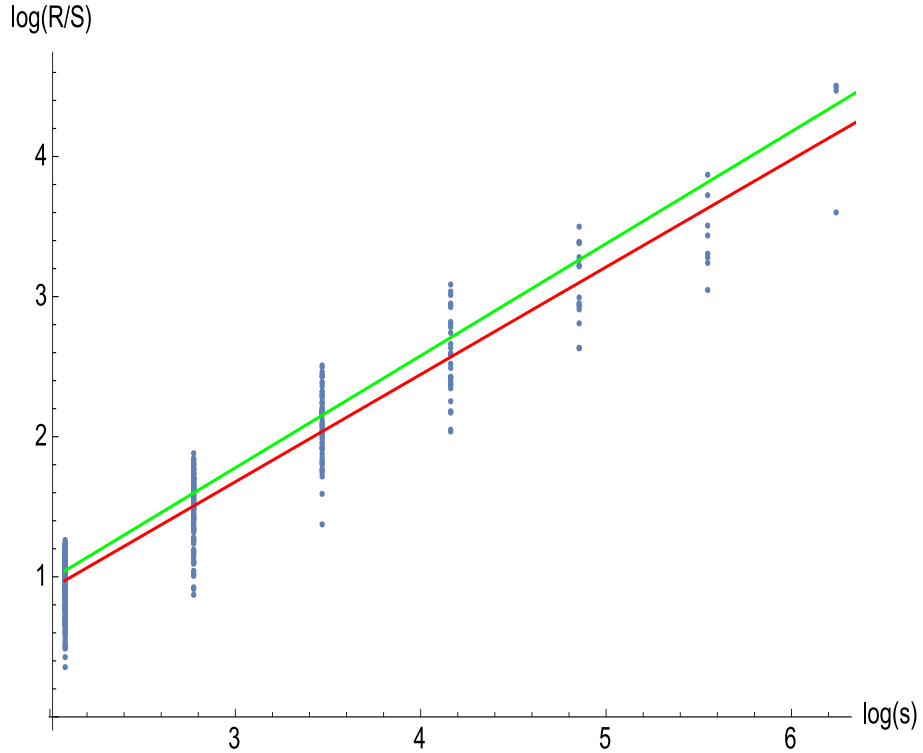
$$R(n_m, s) = \max_{1 \leq k \leq s} \left[ Y_{(n_m-1)+k} - Y_{(n_m-1)} - \frac{k}{s} (Y_{(n_m-1)+s} - Y_{(n_m-1)}) \right] - \min_{1 \leq k \leq s} \left[ Y_{(n_m-1)+k} - Y_{(n_m-1)} - \frac{k}{s} (Y_{(n_m-1)+s} - Y_{(n_m-1)}) \right], \quad (1.8)$$

$$S(n_m, s) = \sqrt{\frac{1}{s-1} \sum_{j=n_m}^{n_m+s-1} (X_j - \bar{X}_{n_m, s})^2}, \quad \bar{X}_{n_m, s} = \frac{1}{s} \sum_{j=n_m}^{n_m+s-1} X_j.$$

Povšimnime si súvislosti medzi úlohami, ktoré zohrávajú  $Y_0 = 0$  v  $R_n/S_n$  a  $Y_{n_m-1}$  v  $R/S(n_m, s)$ . Pre výpočet odhadu  $\hat{H}_o$  aplikujeme lineárnu regresiu na pox-plot  $[\log(s), \log(R/S(n_m, s))]$   $m=1, \dots, M$ ;  $s \in \mathcal{S}$ , pričom voľba podpostupnosti  $\{X_{n_m}\}_{m=1}^M$  a vhodného rozhrania  $\mathcal{S}$  bude špecifikovaná neskôr.

2. *Odhad  $\hat{H}_d$  na základe neprekrývajúcich sa blokov* (tento prístup je ilustrovaný na obrázku 1.3 pre  $n = 2^{11} = 2048$  a  $H = 0.8$ ): postupuje sa ako v bode 1, len pri voľbe veľkosti blokov zmeníme reštrikciu indexov na  $n_m + s - 1 \leq n_{m+1}$ .

*Poznámka 1.3.* V literatúre sa môžeme často stretnúť s ešte jedným druhom R/S analýzy ( $\hat{H}_a$ ), ktorá je založená na spriemerovaných hodnotách R/S (Peters, 1994).



Obr. 1.3: Pox-plot pre odhad parametra  $H$  využitím R/S analýzy na neprekrývajúcich sa blokov pre simuláciu veľkosti  $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad  $\hat{H}_d = 0.767$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu  $H = 0.8$ .



*Poznámka 1.4.* V (Mielniczuk a Wojdyło, 2007) bol taktiež predstavený R/S odhad upravený o vychýlenie (po anglicky *bias-corrected R/S estimator*). Motiváciou na jeho zavedenie bolo približne lineárne chovanie vychýlenia (*bias*)  $\hat{H}_d$  (viď obrázok 1.7). Tento odhad dosahoval v štúdiu najmenšie hodnoty RMSE pre skoro všetky hodnoty  $H$ . Je ale asymptoticky vychýlený pre niektoré hodnoty  $H$ .

*Poznámka 1.5.* Z lemy 3 vieme, že odhad  $S_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma_X$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Pri práci s  $B^H$  a  $X^H$  s jednotkovým rozptylom odhadujeme nám už známu hodnotu. Môžeme preto vo vyššie spomenutých metódach položiť  $S_n = 1$  a počítať iba hodnoty  $R_n$ .

### 1.2.2 DFA odhad Hurstovho parametra

R/S analýza využíva rozdiel maximálneho a minimálneho vertikálneho vychýlenia postupnosti  $Y$  od spojnice bodov  $Y_0 = 0$  a  $Y_n$  normované cez výberovú smerodajnú odchýlku. DFA metóda, ktorá bola prvýkrát predstavená v (Peng a kol., 1994) pri skúmaní sérií DNA nukleotidov, využíva inú mieru variability – štvorcovú fluktuáciu procesu  $Y$  okolo jeho trendu, teda reziduálny súčet štvorcov.

**Definícia 5.** *Majme náhodnú postupnosť  $X = \{X_k\}_{k=1}^n$  a postupnosť jej čiastočných súm  $Y = \{\sum_{j=1}^k X_j\}_{k=1}^n$ . Priemerný reziduálny súčet štvorcov  $Y$  definujeme ako*

$$\overline{SS_e^n} = \frac{1}{n} SS_e^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{Y}_{i,n} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{\beta}_{0,n} - i\hat{\beta}_{1,n} \right)^2,$$

kde je  $\hat{Y}_{i,n} = \hat{\beta}_{0,n} + i\hat{\beta}_{1,n}$  regresná priamka preložená bodmi  $\{k, Y_k\}_{k=1}^n$ .

Taqqu v práci (1995) ukázal, že hodnoty z definície 5 dodržia asymptotický vzťah  $\mathbb{E} \overline{SS_e^n} \sim Cn^{2H}$  pre nejakú konštantu  $C$  a fBm s Hurstovým parametrom  $H$ . Z tohto vzťahu sa nám ponúka nasledujúci postup odhadu parametra  $H$ : Náhodnú postupnosť  $X$  rozdelíme na  $n/s$  neprekrývajúcich sa blokov veľkosti  $s$  (hodnoty  $s$  volíme tak, aby  $n/s \in \mathbb{N}$ ). Pre každý blok  $i = 1, \dots, n/s$  veľkosti  $s$  vypočítame príslušné  $SS_e^{s,i}$  podľa definície 5, ktoré následne spriemerujeme a odmocníme. Dostaneme:

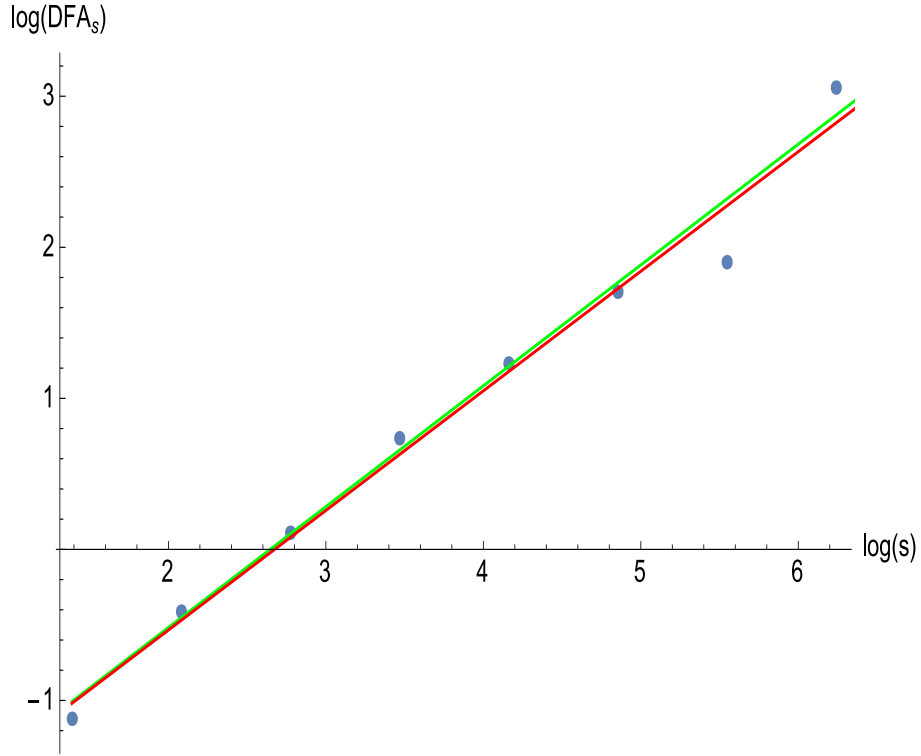
$$\text{DFA}_s = \sqrt{\frac{s}{n} \sum_{i=1}^{n/s} \overline{SS_e^{s,i}}}.$$

Toto opakujeme pre dostatočne mnoho hodnôt  $s$ . Podobne ako pri pox-plote, preložíme bodmi  $[\log(s), \log(\text{DFA}_s)]$  regresnú priamku, ktorej sklon bude predstavovať náš odhad  $\hat{H}_{dfa}$ . Táto metóda je ilustrovaná na obrázku 1.4.

*Poznámka 1.6.* Weron v (2001) predstavil modifikáciu DFA, ktorá spočíva v zámene poradia spriemerovania a spravenia druhej odmocniny, teda

$$\text{DFA}_s^* = \frac{s}{n} \sum_{i=1}^{n/s} \sqrt{\overline{SS_e^{s,i}}}.$$

Obe metódy dosahujú porovnateľné výsledky s nepatrnou výhodou pre  $\text{DFA}_s^*$  pri vyšších hodnotách  $H$ . Heuristické odôvodnenie korektnosti tohto odhadu je možné nájsť napríklad v práci (Mielniczuk a Wojdyło, 2007, str. 10).



Obr. 1.4: DFA metóda odhadu parametra  $H$  pre simuláciu veľkosti  $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad  $\hat{H}_{dfa} = 0.792$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu  $H = 0.8$ .

*Poznámka 1.7.* Pri oboch variáciách DFA metódy je možné zameniť  $\hat{Y}_{i,n} = \hat{\beta}_{0,n} + i\hat{\beta}_{1,n}$  za odhad polynómom vyššieho rádu. V literatúre sa však využíva prevažne rád *prvý* a *druhý*, pretože vyššie rády nepridávajú žiadnu signifikantnú informáciu (Vandewalle a kol., 1997).

### 1.2.3 Odhad Hurstovho parametra založený na periodograme

Ak nás zaujíma dodatočná informácia o odhade, ako napríklad asymptotický konfidenčný interval, využijeme odhady  $H$  založené na *periodograme*. Tieto odhady sú založené na periodograme náhodného výberu a spektrálnej hustote procesu (v našom prípade  $X$ ), od ktorých chceme aby minimalizovali danú *funkciu dobrej zhody* (po anglicky *goodness-of-fit function*). Sústreďme sa na *odhad maximálnej vierohodnosti* (anglicky *maximum likelihood estimate* – MLE) založenom na Whittleovej aproximácii MLE pre gausovské procesy tak, ako bol prezentovaný v práci (Willinger a kol., 1995). Budeme pracovať s periodogramom

$$I(\lambda) = (2\pi n)^{-1} \left| \sum_{j=1}^n X_j \exp\{i\lambda j\} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Je pochopiteľné, že na rozdiel od prvých dvoch metód nepoužijeme vlastnosť *dlhodobej závislosti*, ale vlastnosť *sebahodobnosti*, ktorú má fBm a teda následne aj fGn. Majme sebahodobný gausovský proces  $X = \{X_k\}_{k=1}^n$ . Buď

$f(\lambda; \boldsymbol{\theta}) = \sigma_\epsilon^2 f(\lambda; (1, \boldsymbol{\eta}))$  spektrálna hustota  $X$ , kde

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_l) = (\sigma_\epsilon^2, \boldsymbol{\eta}) = (\sigma_\epsilon^2, H, \theta_3, \dots, \theta_l),$$

je vektor parametrov.  $H$  je parameter sebedobnosti. Za parameter škály berieme rozptyl  $\sigma_\epsilon^2$  inovácie  $\epsilon$  v autoregresnej reprezentácii  $X_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{k-i} + \epsilon_k$ , takže  $\sigma_\epsilon^2 = \text{var}(\epsilon_k)$ . Teda platí:

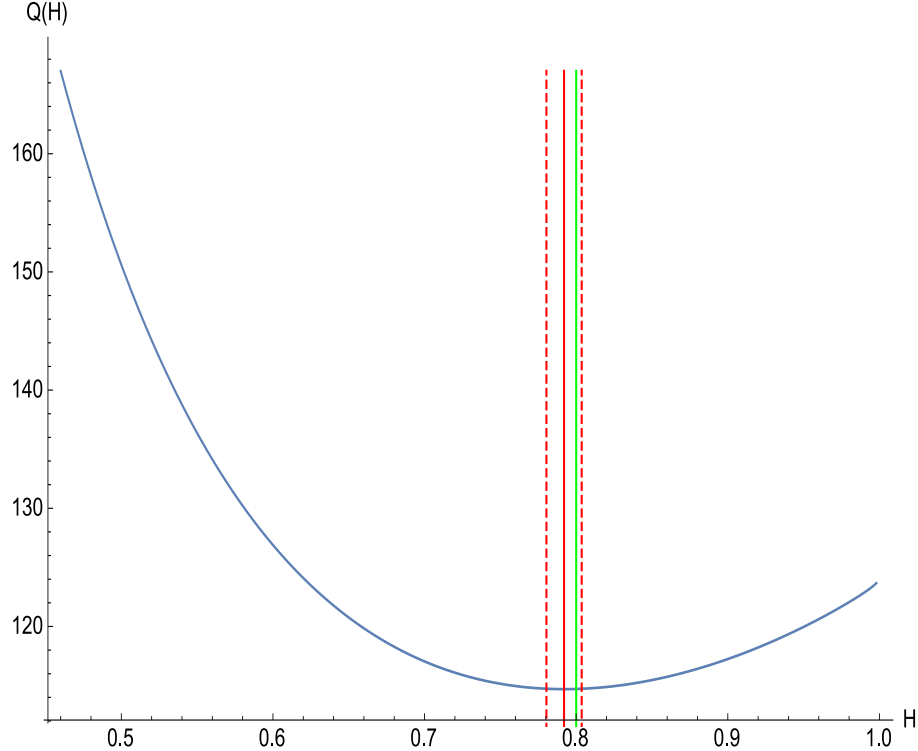
$$\int_{-\pi}^{\pi} \log [f(\lambda; (1, \boldsymbol{\eta}))] d\lambda = 0 \quad (1.9)$$

(Beran, 1994). Parametre  $\theta_j$ ,  $j = 3, \dots, l$  sú parametre krátkodobej závislosti postupnosti, ktorými sa nemusíme v prípade frakcionálneho Brownovho pohybu zaošovať. Spektrálna hustota (nenormovaného) fGn, ktorú označíme ako  $f_H(\lambda)$ , je tvaru:

$$f_H(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1) (1 - \cos(\lambda)) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j + \lambda|^{-2H-1},$$

kde  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ . Ak  $H \in (1/2, 1)$ , má spektrálna hustota  $f_H(\lambda)$  pól  $c|\lambda|^{1-2H}$  v okolí počiatku ( $c$  je kladná konštanta). Pre  $\boldsymbol{\eta} = (H)$  *periodogram* (budeme sa na túto metódu odhadu odvolávať ako na "periodogram")  $\hat{H}_w$  minimalizuje

$$Q(H) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\lambda)}{f(\lambda; (1, H))} d\lambda. \quad (1.10)$$



Obr. 1.5: Odhad parametra  $H$  simulovaného fBm dĺžky  $n = 2^{11} = 2048$  pomocou periodogramu. Červená čiara predstavuje odhad  $\hat{H}_w = 0.792$  s 95%-ným asymptotickým konfidenčným intervalom vyznačeným prerušovanými čiarami, vertikálna zelená čiara označuje skutočnú hodnotu  $H = 0.8$ .

Použitím novo dosiahnutého odhadu  $\hat{H}_w$  odhadneme  $\sigma_\epsilon^2$  pomocou

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = Q(\hat{H}_w) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\lambda)}{f(\lambda; (1, \hat{H}_w))} d\lambda. \quad (1.11)$$

Pre odhad vektora parametrov  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\sigma}_\epsilon^2, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = (\hat{\sigma}_\epsilon^2, \hat{H})$  platí centrálna limitná veta s rovnakou asymptotickou kovariančnou maticou  $\mathbf{V}$  ako má MLE (Beran, 1984). To znamená:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \mathbf{V}) \text{ pre } n \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{V} = 2\mathbf{D}^{-1}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\delta}{\delta\theta_i} \log[f(\lambda)] \frac{\delta}{\delta\theta_j} \log[f(\lambda)] d\lambda, \quad (1.13)$$

pričom  $i, j = 1, \dots, l$ . Dahlhaus v (1989) ukázal, že postupnosť matíc Fisherovej informácie konverguje pre  $n \rightarrow \infty$  ku  $\frac{1}{2}\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}$ , takže  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  je asymptoticky eficientný MLE odhad.

#### 1.2.4 Simulácia a porovnanie metód odhadu parametra $H$

V tejto časti porovnáme všetky nami spomenuté metódy pre odhad Hurstovho parametra  $H$ . Opíšeme použité postupy pri ich aplikácii, pričom odkazujeme čitateľa na *sprievodný dokument* napísaný v systéme *Wolfram Mathematica*, kde sú naprogramované aj s upresňujúcimi komentármi. Je v ňom možné taktiež nájsť dodatočné grafické znázornenie charakteristík jednotlivých typov odhadu. Všetky algoritmy v sprievodnom dokumente boli optimalizované v zmysle minimalizácie času potrebného na odhad Hurstovho parametra  $H$  pre unikátnu simuláciu.

Začneme opisom jednotlivých postupov odhadu. Berme v úvahu postupnosti dĺžky  $n = 2^N$ , pričom  $N \in [9, \dots, 15]$ . Ďalej v texte používame  $N = \log_2 n$ . Rady tejto dĺžky sa budú ľahko a intuitívne rozdeľovať na neprekrývajúce sa bloky. Pomocou implementovanej funkcie *FractionalBrownianMotionProcess* systému *Wolfram Mathematica* sme nasimulovali 500 rôznych trajektórií fBm dĺžky  $n = 2^{11} = 2048$  pre Hurstove parametre  $H = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ . Hodnoty fGn sme obdržali využitím vzťahu 1.4.

Ako sme spomenuli v 1.2.1, pri aplikácii **Hurstovej R/S analýzy** je potrebné vhodne zvoliť postupnosť *počiatočných bodov*  $\{X_{n_m}\}_{m=1}^M$  a rozhranie  $\mathcal{S}$ . Hlbšie sa touto problematikou zaoberá Beran v (1994, str. 84).

- Pri odhade  $\hat{H}_o$  stanovíme  $n_m = 30 * 2^{N-9}(m-1) + 1$ ,  $m = 1, \dots, 14$ , pričom analyzované bloky budú dĺžky  $s = 10, 20, 30, \dots, 100 * 2^{N-9}$ .
- Pri odhade  $\hat{H}_d$  postupujeme nasledovne: pre každé  $s = 2^1, 2^2, \dots, 2^N$  rozdelíme  $X$  na  $n/s$  neprekrývajúcich sa blokov dĺžky  $s$ . Tým dostaneme  $N$  rôznych postupností počiatočných bodov s rovnakým parametrom  $s$ . Intuitívne vieme povedať, že pre príliš malé  $s$  nemôžeme použiť asymptotiku  $Z_s \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$  z lemy 3. Na druhej strane, pre príliš veľké  $s$  nie sú extrémne hodnoty dostatočne spriemerované. Ako môžeme vidieť na obrázku 1.3, s rastúcim  $s$  klesá počet príslušných hodnôt  $R/S(n_m, s)$ . Voľba nadmerne veľkého  $s$  preto môže konečný odhad parametra  $H$  vychýliť (Peters, 1994).

Najmenšia hodnota  $s$  braná pri tejto analýze v úvahu sa v literatúre nazýva *minimálna októva*. Odvoláme sa na štúdiu (Mielniczuk a Wojdyło, 2007), kde je pri používaní odhadu  $\hat{H}_d$  na základe rozumných výsledných hodnôt RMSE navrhnuté využitie *minimálnej októvy* rovnaj  $2^3 = 8$ . Ako hornú hranicu zvolíme  $2^9 = 2^{N-2}$ .

Ďalej postupujeme pre oba typy odhadov rovnako. Použijeme R/S analýzu, presnejšie vzorec 1.8, na jednotlivé bloky dát. Výsledné hodnoty zakreslíme do poxplotu. Aplikáciou lineárnej regresie dostaneme nami požadované odhady  $\hat{H}_o$  a  $\hat{H}_d$ .

Metóda **DFA** opäť rozdeľuje náhodnú postupnosť na neprekrývajúce sa bloky. Využijeme preto výhodu, ktorú nám voľba dĺžky časovej rady  $n = 2^N$  prináša. Tak ako pri  $\hat{H}_d$ , aj tu treba určiť *minimálnu októvu* a maximálnu nami využitú hodnotu  $s$ . Je zrejmé, že najmenšia veľkosť bloku, ktorú môžeme brať do úvahy je  $2^2$ , pretože  $\overline{SS}_e^s = 0$  pre  $s = 2^1$ . Z empirických štúdií sa zdá, že *RMSE* je rastúcou funkciou *minimálnej októvy* a teda volíme *minimálnu októvu* rovnú  $2^2 = 4$  (Mielniczuk a Wojdyło, 2007). Hornú hranicu sme opäť vybrali rovnú  $2^{N-2}$  z rovnakých dôvodov ako v prípade  $\hat{H}_d$ . Pre každú simuláciu teda vypočítame hodnoty  $DFA_s$ ,  $s = 2^2, \dots, 2^9$ , ktoré následne zakreslíme do log-log grafu. Aplikáciou lineárnej regresie dostaneme požadovaný odhad  $\hat{H}_{dfa}$ .

Pri využití **periodogramu** sme sa nechali inšpirovať procedúrou v knihe (Beran, 1994, str. 218-233). Tá používa diskretizáciu Whittleovho odhadu predstavenú v (Graf, 1983). Zmena spočíva v zámene integrálu v 1.10 Riemannovou sumou cez *Fourierove frekvencie*, čím dostaneme:

$$Q(H) = 2 \sum_{j=1}^{n*} \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j; (1, H))} \frac{2\pi}{n}, \quad (1.14)$$

pričom

$$n* = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \quad \lambda_j = \frac{2\pi j}{n}.$$

Na to aby sme obdržali odhad  $\hat{H}_w$  stačí aplikovať výraz 1.14 na dostatočne jemnú sieť  $\mathcal{H}$  hodnôt parametra  $H$ . Volíme rozhranie  $H \in (0.46, 0.998)$  s krokmi

Metóda	Čas potrebný na odhad	Odhad pri $H = 0.8$
$\hat{H}_o$	2.23s	0.7659
$\hat{H}_d$	0.56s	0.7665
$\hat{H}_{dfa}$	2.93s	0.7916
$\hat{H}_w$	13.12s*	0.7920

Pozn: \* čas je uvedený bez počiatočných pomocných výpočtov trvajúcich  $\sim 110.31$ s.

Tabuľka 1.1: Porovnanie času potrebného na výpočet v systéme Wolfram Mathematica 10.2 a presnosť odhadov Hurstovho parametra  $H$  pre všetky spomenuté metódy aplikované na simuláciu fBm s  $H = 0.8$  a dĺžky  $n = 2048$ . Použitý počítač používa operačný systém Microsoft Windows 7, Intel Core i3 CPU M 330 @ 2.13Ghz s 4GB RAM.

veľkosti 0.002. Kvôli zjednodušeniu výpočtu môžeme výraz 1.14 očistiť o konštanty, čím dostaneme:

$$\hat{H}_w = \operatorname{argmin}_{H \in \mathcal{H}} [Q(H)] = \operatorname{argmin}_{H \in \mathcal{H}} \left[ \sum_{j=1}^{n^*} \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j; (1, H))} \right]. \quad (1.15)$$

Vypočítame hodnoty spektrálnej hustoty fGn pre Fourierove frekvencie, ktoré však treba na základe podmienky 1.9 ďalej upraviť. Minimalizáciou 1.15 pomocou upravených hodnôt spektrálnej hustoty a periodogramu skúmanej náhodnej postupnosti vo Fourierových frekvenciách dostaneme požadovaný odhad  $\hat{H}_w$ . Beran v (1994, str. 112) ukazuje, že  $D_{1j} = D_{j1} = 0$ ,  $j \neq 1$  (viď 1.13), z čoho vyplýva že odhad  $\hat{\sigma}_\epsilon^2$  je asymptoticky nezávislý od odhadov  $\hat{\theta}_j \in \hat{\boldsymbol{\eta}}$ . Hranice obojstranného asymptotického  $(1 - \alpha) \times 100$ -percentného konfidenčného intervalu pre Hurstov parameter  $H$  dostaneme použitím 1.12:

$$\hat{H}_w \pm F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{V_{22}}{n}},$$

kde  $V_{22}$  je druhý diagonálny prvok kovariančnej matice  $\mathbf{V}$  z 1.13 a  $F^{-1}$  kvantilová funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Všimnime si, že  $\mathbf{D}$  je diagonálna  $2 \times 2$  matica. Na obdržanie asymptotického konfidenčného intervalu teda potrebujeme iba hodnotu  $D_{22}$ . Využijeme Riemannovu sumu a numerickú diferenciu prvého rádu pre  $\delta = 10^{-5}$ .

*Poznámka 1.8.* Ak by nás zaujímal odhad  $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ , aplikujeme Riemannovu sumu cez Fourierove frekvencie na 1.11:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{4\pi}{n} \sum_{j=1}^{n^*} \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j; (1, \hat{H}_w))}.$$

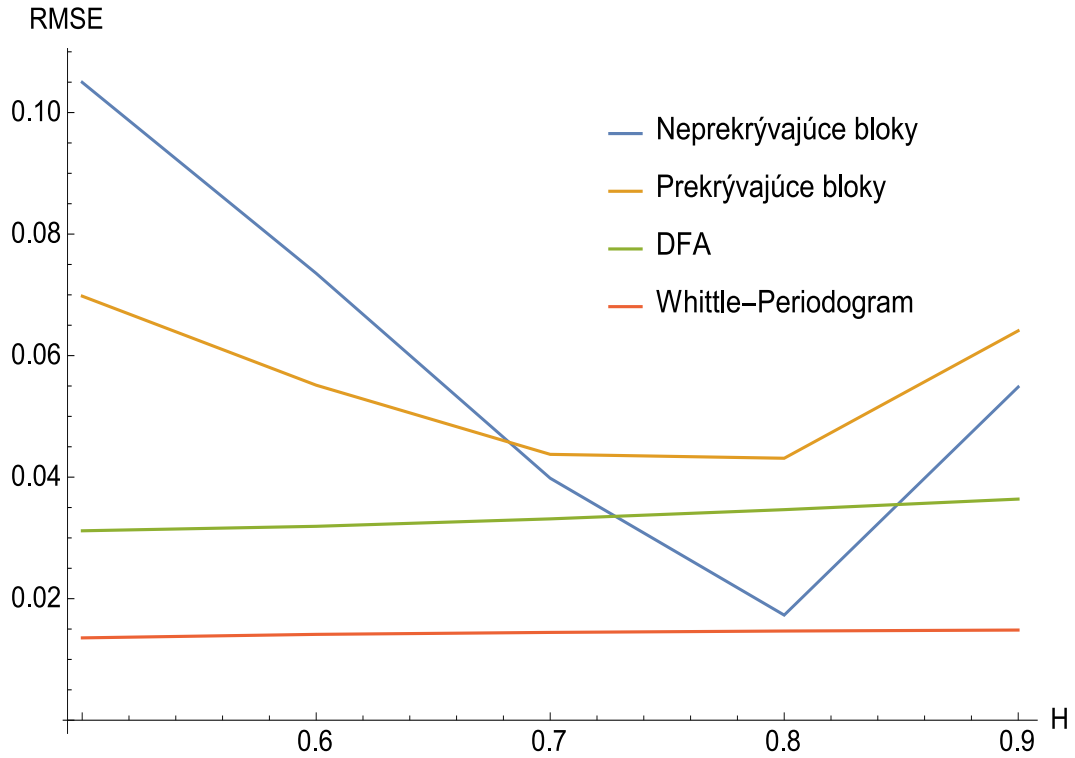
V tabuľke 1.1 sú uvedené časy potrebné na výpočet odhadu pre jednotlivé metódy. Obsahuje taktiež odhady pre ilustračné príklady z predchádzajúcich častí sekcie (1.3, 1.4, 1.5). Na základe údajov v tabuľke by sme mohli predpokladať, že s presnejším odhadom sa nám zvyšuje čas potrebný na výpočet (výnimkou je  $\hat{H}_o$ ).

Presnosť odhadov budeme posudzovať na základe *odmocninovej strednej štvorcovej chyby* (anglicky *root mean square error* – RMSE), ktorá má tvar

$$\text{RMSE}_H^{\text{Sim}} = \sqrt{\frac{1}{\text{Sim}} \sum_{i=1}^{\text{Sim}} (\hat{H}_i - H)^2},$$

kde  $\text{Sim}$  predstavuje počet nasimulovaných trajektórií fBm s Hurstovým parametrom  $H$  a dĺžky  $n = 2^{11} = 2048$ , na ktoré sme danú metódu aplikovali. V našom prípade platí  $\text{Sim} = 500$ .

Ak sa pozrieme na obrázok 1.6 vidíme, že periodogram vracia najmenšie hodnoty RMSE pri aplikácii na nami simulované dáta. Čo viac, hodnota jeho RMSE pre nami použité  $n$  a  $\text{Sim}$  sa s rastúcim  $H$  mení iba minimálne (menej ako 9%). Taktiež nám umožňuje dopočítať asymptotický konfidenčný interval odhadu. Jeho slabá stránka spočíva v správnej voľbe parametrického modelu. Uvažujme



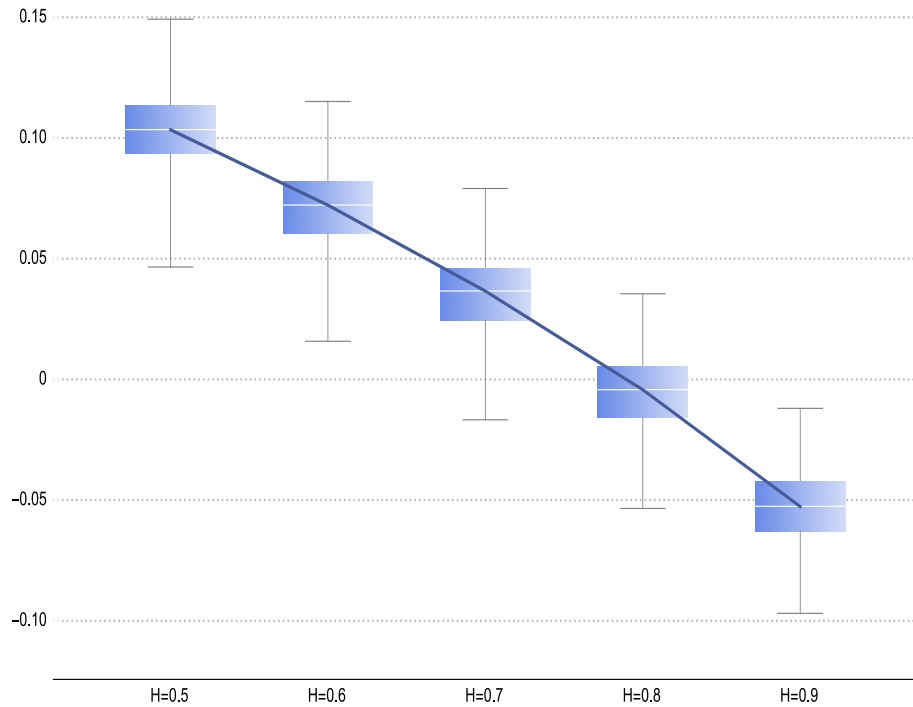
Obr. 1.6: RMSE všetkých spomenutých metód odhadu Hurstovho parametra  $H$   $Sim = 500$  trajektorií frakcionálneho Brownovho pohybu dĺžky  $n = 2048$ .

nasledovnú situáciu: buď fGn nami použitý parametrický model, ktorý však aplikujeme na  $FARIMA(p, d, q)$  (iný náhodný proces známy svojou sebedobnosťou a dlhodobou závislosťou). V prípade že je nami predpokladaný parametrický model nesprávny, presnosť odhadu klesá spolu s  $H$  (Mielniczuk a Wojdyło, 2007). Ďalšie problémy periodogramu spomenuté v literatúre sú:

- *Odchýlky od predpokladaného parametrického modelu na vyšších frekvenciách vedú k vychýleniu odhadu  $H$ .* Riešenie: odhadnúť  $H$  iba na základe hodnôt periodogramu na nižších frekvenciách. Ak pracujeme s dostatočne veľkou vzorkou dát  $X_n$ , môžeme agregovať dáta cez neprekrývajúce sa bloky rôznych veľkostí  $s$ , čím dostaneme rôzne postupnosti  $X_n^{(s)}$ , z ktorých následne odhadneme  $\hat{H}_w^{(s)}$  (Willinger a kol., 1995).
- *Nesplnenie podmienky gausovskosti.* Riešenie: pri použití transformácie dát (napríklad log-transformácie) je potrebné následne dokázať, že odhad  $H$  je totožný pre originálnu a transformovanú vzorku dát.

Podobne ako pri periodograme, aj pre metódu DFA sa (pri nami použitých hodnotách  $n$  a  $Sim$ ) RMSE mení iba minimálne s rastúcim  $H$  (menej ako 9%). Samotné hodnoty RMSE však dosahujú dvojnásobné hodnoty oproti periodogramu. Pre  $H$  okolo hodnoty 0.8 sú dokonca vyššie než pri využití R/S analýzy založenej na neprekrývajúcich blokoch.

Ak sa pozrieme na obrázok 1.7 vidíme, že R/S analýza založená na neprekrývajúcich sa blokoch vykazuje systematickú chybu, ktorá klesá takmer lineárne s rastúcim  $H$  (pri nami použitom  $n = 2048$ ,  $Sim = 500$ ). Tento fakt navádza na



Obr. 1.7: Box-ploty odchýlok odhadov R/S analýzy založenej na neprekrývajúcich sa blokoch pri  $r = 2048$ ,  $Sim = 500$  pre hodnoty Hurstovho prametera rovné  $H = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ .

odhad založený na  $\hat{H}_d$  očistený o túto systematickú chybu (viď poznámka 1.4). Taktiež,  $\hat{H}_d$  nie je považovaný za odhad v striktnom slova zmysle, nakoľko zahŕňa voľbu neznámej optimálnej minimálnej oktávy (Mielniczuk a Wojdyło, 2007).

Metóda odhadu, ktorú využijeme v ilustračnom príklade, je DFA. Dôvod pre to je, že po periodograme dáva druhé najlepšie konzistentné výsledky v zmysle RMSE. Preferujeme ju pred periodogramom z dôvodu výskytu vychýlenia pri zlom predpoklade modelu.

*Poznámka 1.9.* Na základe výsledkov našej simulačnej štúdie by sme radi upozornili na možnú chybu v práci (Mielniczuk a Wojdyło, 2007). Domnievame sa, že v nej boli zamenené výsledky odhadu  $\hat{H}_o$  (v spomenutej práci označený ako  $\hat{H}_{o-p}$ ) s výsledkami odhadu z poznámky 1.3 (v spomenutej práci označený ako  $\hat{H}_{o-a}$ ), čo zapríčinilo mylné závery o týchto dvoch metódach.

### 1.3 Frakcionálny Brownov pohyb vo financiách

Hlavná podmienka aplikovateľnosti ľubovoľného finančného modelu je neexistencia arbitráže. Vieme, že ak je cena podkladového aktíva modelovaná pomocou semimartingálu, neexistuje arbitráž. Môžeme preto povedať, že hlavným kameňom úrazu aplikácie fBm vo financiách je fakt, že  $B^H$  nie je semimartingál pre  $H \neq \frac{1}{2}$ .

Rogers v (1997) odvodil arbitrážne príležitosti vo frakcionálnom Bachelierovom modeli, čím došiel k záveru že fBm nie je vhodný na využitie vo fi-



nančných modeloch. Nakoľko však boli jeho výsledky limitované na lineárny prípad bez driftu, mnoho autorov sa naďalej venovalo možnostiam využitia fBm. O rok neskôr, Shirayayev v (1998) odvodil explicitnú arbitrážnu stratégiu vo frakcionálnom trhu definovanom pomocou 1.16 a 1.17 na základe integrácie po častiach (anglicky *pathwise integrals*). Proces  $\{P(t), t \in \mathbb{R}_+\}$  predstavuje cenu za jednotku bezrizikového aktíva,  $\{S(t), t \in \mathbb{R}_+\}$  cenu za jednotku rizikového aktíva.

$$dP(t) = rP(t)dt, \quad (1.16)$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB^H(t). \quad (1.17)$$

V literatúre sa môžeme stretnúť s množstvom dôkazov že  $B^H$  nie je semimartingál. Použijeme modifikáciu postupu predstaveného v práci (Rogers, 1997) a ukážeme, že  $B^H$  nie je semimartingál pre  $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$  využitím *p-variácie* náhodného procesu.

**Definícia 6** (filtrácia). *Bud'  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pravdepodobnostný priestor. Filtráciou rozumieme systém  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$   $\sigma$ -algebier splňujúcich*

1. *pre všetky  $t \in \mathbb{R}_+$  platí  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ,*
2. *pre všetky  $t > s$  platí  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ .*

*Poznámka 1.10.* Množinu všetkých spojitých lokálnych martingálov označíme  $\mathcal{M}_{loc}^C$ .

**Definícia 7.** Semimartingál *definujeme ako náhodný proces  $\{X(t), t \in [0, T]\}$ , ktorý má reprezentáciu*

$$X(t) = X(0) + M(t) + V(t), \quad t \in [0, T],$$

*kde  $X(0)$  je  $\mathcal{F}_0$ -merateľná náhodná veličina,  $\{M(t), t \in [0, T]\} \in \mathcal{M}_{loc}^C$ ,  $\{V(t), t \in [0, T]\}$  je spojitý adaptovaný proces, ktorého trajektórie majú  $\mathcal{P}$ -s.u. konečnú variáciu, pričom  $M(0) = V(0) = 0$ .*

**Definícia 8** (p-variácia). *Bud'  $\{X(t), t \in [0, T]\}$  náhodný proces. Uvažujme konečné delenie  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  intervalu  $[0, T]$ . Nech*

$$\mathcal{S}_p(X, \pi) := \sum_{i=1}^n |X(t_i) - X(t_{i-1})|^p.$$

*P-variáciou náhodného procesu  $X$  na intervale  $[0, T]$  nazveme*

$$\mathcal{V}_p(X, [0, T]) := \sup_{\pi} \mathcal{S}_p(X, \pi).$$

*Index p-variácie náhodného procesu  $X$  je definovaný ako*

$$I(X, [0, T]) := \inf\{p > 0; \mathcal{V}_p(X, [0, T]) < \infty\}.$$

**Veta 4.** *Pre všetky  $T \in \mathbb{R}_+$  platí:*

$$I(B^H, [0, T]) = \frac{1}{H}.$$

*Dôkaz.* Uvažujme pre  $p > 0$

$$Y_{n,p} = n^{pH-1} \sum_{j=1}^n \left| B^H \left( \frac{j}{n} \right) - B^H \left( \frac{j-1}{n} \right) \right|^p,$$

$$\tilde{Y}_{n,p} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \left| B^H(j) - B^H(j-1) \right|^p.$$

Aplikáciou vety 2 dostávame  $\{Y_{n,p}\}_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\tilde{Y}_{n,p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Podľa *ergodickej vety* (viď Da Prato a Jabczyk, 1996) platí  $\tilde{Y}_{n,p} \rightarrow \mathbb{E} \left[ |B^H(1)|^p \right]$  s.u. v  $L^1$  pre  $n \rightarrow \infty$  a teda taktiež  $\tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E} [|B^H(1)|^p]$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Z toho vyplýva, že postupnosť

$$V_{n,p} = \sum_{j=1}^n \left| B^H \left( \frac{j}{n} \right) - B^H \left( \frac{j-1}{n} \right) \right|^p \xrightarrow{\mathcal{P}} \begin{cases} 0, & \text{ak je } pH > 1, \\ \infty, & \text{ak je } pH < 1, \end{cases}$$

pre  $n \rightarrow \infty$ , čo dokazuje vetu 4. □

Keďže pre každý semimartingál platí  $I(X, [0, T]) \in [0, 1] \cup \{2\}$  (Dudley a Norvaisa, 1998), fBm nie je semimartingál pokiaľ  $H \neq 1/2$ .

*Poznámka 1.11.* Na definovanie stochastického integrálu pre  $B^H$  nemôžeme využiť Itôv stochastický kalkulus. Odkazujeme preto čitateľa napríklad na práce (Mishura, 2008; Biagini a kol., 2008), kde sú uvedené alternatívne spôsoby jeho zavedenia. Medzi inými Wickov-Itôv-Skorohodov integrál, Wienerov integrál, integrácia po častiach a iné.

### 1.3.1 Riešenie výskytu arbitráže

Ak chceme pracovať s modelmi založenými na fBm, musíme sa najprv zbaviť arbitrážnych príležitostí. Predstavíme dva prístupy, ktoré sú v posledných rokoch najpreferovanejšie, pričom sa sústredíme na druhý z nich:

1. reštrikcie na mikroštruktúrne podklady trhu pre fBm,
2. práca so zmiešaným frakcionálnym Brownovým pohybom,

V práci (Bayraktar a kol., 2006) bol predstavený náhodný proces  $\{X^a(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ , ktorý predstavuje správanie investora  $a$ . Pre všetky časy kedy je rovný nule, investor  $a$  je v neaktívnom stave. Tento prístup je založený na predpoklade, že po každej transakcii existuje pravdepodobnosť, že investor bude v nasledujúcom časovom úseku neaktívny. Dôvod pre túto nečinnosť môže byť zámerný (rozhodnutie investora), alebo zapríčinený technickými obmedzeniami. Cheridito v (2003) dokázal, že ak investor nie je schopný vykonávať transakcie v nekonečne malých intervaloch, trh sa stane bezarbitrážnym, avšak na úkor dynamickej úplnosti trhu.

Ďalej zavedieme pojem *zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb* (anglicky *mixed fractional Brownian motion*). Pozrieme sa na jeho základné vlastnosti a využitie vo financiách.

**Definícia 9** (Cheridito, 2001). *Náhodný proces  $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$  nazveme slabý semimartingál, ak je pre všetky  $T > 0$  rodina náhodných veličín*

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i [X(t_i) - X(t_{i-1})] ; n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \dots < t_n = T, |a_i| < 1, a_i \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}^X \right\}$$

*obmedzená v  $L^0$ , pričom  $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  je filtrácia generovaná procesom  $X$ .*

**Definícia 10.** Zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb (skrátene mfBm)  $M^{H, \alpha, \beta}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pre  $t \in \mathbb{R}_+$  s parametrami  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  a  $H$  definujeme ako lineárnu kombináciu Brownovho pohybu a fBm

$$M^{H, \alpha, \beta} = \left\{ \alpha B(t) + \beta B^H(t), t \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

kde  $B$  je Brownov pohyb nezávislý od  $B^H$  a  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ .

V literatúre sa môžeme stretnúť s pozmenenými definíciami mfBm, ktoré sa zpravidla líšia v parametrizácii  $\alpha$  a  $\beta$ . My sa sústredíme na obmedzený tvar mfBm, presnejšie  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ , ktorý označíme  $M^H$ . Trajektória mfBm pre parameter  $H = 0.85$  je znázornená na obrázku 2.3. Cheridito v (2001) ukazuje, že  $B^H$  nie je ani slabý semimartingál pre  $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ , čo ho viedlo ku skúmaniu vlastností  $M^H$  a následne k vete uvedenej nižšie.

**Definícia 11** (ekvivalencia náhodných procesov). *Bud'  $(C[0, 1], \mathcal{B})$  priestor spojitých funkcií so  $\sigma$ -algebrou generovanou cylindrickými množinami. Ak  $\{X(t), t \in [0, T]\}$  je s.u. spojitý náhodný proces, označíme  $P_X$  mieru indukovanú procesom  $X$  na  $(C[0, 1], \mathcal{B})$ . Povieme, že s.u. spojité náhodné procesy  $X$  a  $Y$  sú ekvivalentné, ak  $P_X \sim P_Y$ .*

**Veta 5** (Cheridito, 2001, str. 4). *mfBm  $M^H = \{M^H(t), t \in [0, 1]\}$  nie je slabý semimartingál pre  $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 3/4]$ , je ekvivalentný  $\sqrt{2}$  násobku Brownovho pohybu pre  $H = 1/2$  a ekvivalentný Brownovmu pohybu pre  $H \in (3/4, 1)$ .*

*Dôkaz.* Dôkazu tejto vety je dedikovaná skoro celá práca (Cheridito, 2001). □

*Dôsledok.* V modeli, kde je cena podkladového aktíva modelovaná pomocou  $M^H$ ,  $H \in (3/4, 1)$  neexistuje arbitráž.

Pre úplnosť si uvedieme základné vlastnosti mfBm s tvarom z definície 11.

**Veta 6** (Zili, 2006). *Pre  $M^{H, \alpha, \beta}$  platí:*

1.  $M^{H, \alpha, \beta}$  je centrováný gausovský proces, ktorý nie Markovovský pre  $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ ,
2.  $M^{H, \alpha, \beta}(0) = 0$   $\mathcal{P}$ -s.u.,
3. kovariančná funkcia  $M^{H, \alpha, \beta}(t)$  a  $M^{H, \alpha, \beta}(s)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$  je daná predpisom

$$\text{cov}(M^{H, \alpha, \beta}(t), M^{H, \alpha, \beta}(s)) = \alpha^2 (t \wedge s) + \frac{\beta^2}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

4. *prírastky  $M^{H,\alpha,\beta}$  sú stacionárne a zmiešane sebedpodobné s parametrom  $H$  pre každé  $a > 0$ :*

$$M^{H,\alpha,\beta}(at) \stackrel{\mathcal{D}}{=} M^{H,\alpha a^{1/2},\beta a^H}(t),$$

5. *prírastky  $M^{H,\alpha,\beta}$  sú záporne korelované pre  $H \in (0, 1/2)$ , nekorelované pre  $H = 1/2$  a kladne korelované pre  $H \in (1/2, 1)$ ,*

6. *pre  $H \in (1/2, 1)$  majú prírastky  $M^{H,\alpha,\beta}$  dlhodobú závislosť.*

*Dôkaz.* Vid' (Zili, 2006). □

V nasledujúcej časti odvodíme modifikáciu Black-Scholesovho vzorca na oceňenie európskych opcií pre zmiešaný frakcionálny trh. Inšpirovali sme sa prácou (Sun, 2013), kde sa autori venujú oceňovaniu menových európskych opcií. Obmedzíme sa preto na  $H \in (3/4, 1)$ , kde je mfBm ekvivalentný Brownovmu pohybu.

### 1.3.2 Black-Scholesov oceňovací vzorec pre mfBm

Až do konca tejto sekcie budeme využívať *frakcionálnu podmienenú strednú hodnotu* (anglicky *quasi-conditional expectation*). Na jej celistvé zavedenie sú potrebné znalosti stochastického kalkulusu pre fBm, na ktorých uvedenie nemáme v tejto práci priestor. Odkazujeme preto čitateľa napríklad na prácu (Biagini a kol., 2008, str. 84), kde si môže tieto znalosti doplniť. Nasledujúce lemy využijeme na dôkaz tvaru konečného oceňovacieho vzorca európskych opcií v zmiešanom frakcionálnom Black-Scholesovom trhu.

**Lema 7** (Sun, 2013). *Bud'  $\tilde{\mathbb{E}}_t$  frakcionálna podmienená stredná hodnota vzhľadom ku rizikovo neutrálnej miere. Ďalej bud'  $f$  funkcia, pre ktorú platí  $\tilde{\mathbb{E}}_t[f(\sigma B(T) + \sigma B^H(T))] < \infty$ . Potom pre každé  $0 < t \leq T$  a  $\sigma \in \mathbb{Q}$  platí*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t[f(\sigma B(T) + \sigma B^H(T))] &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t+T^{2H}-t^{2H})}} \exp\left\{-\frac{(x - \sigma B(t) - \sigma B^H(t))^2}{2\sigma^2(T-t+T^{2H}-t^{2H})}\right\} f(x) dx. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Vid' (Sun, 2013, str. 11). □

Zvoľme ľubovoľné  $\theta, \omega \in \mathbb{R}$ . Uvažujme proces  $Z^* = \{Z^*(t), t \in [0, T]\}$ , kde  $Z^*(t) = \theta B^*(t) + \omega (B^H(t))^* = \theta B(t) + \theta^2 t + \omega B^H(t) + \omega^2 t^{2H}$ . Z Girsanovej vety dostávame, že existuje taká miera  $\mathbb{P}^*$ , že  $Z^*$  je mfBm (Sun, 2013). Označíme  $\tilde{\mathbb{E}}_t^*$  frakcionálnu podmienenú strednú hodnotu vzhľadom ku miere  $\mathbb{P}^*$ .

**Lema 8** (Sun, 2013). *Uvažujme náhodný proces*

$$X = \left\{ \exp\left(-\theta B(t) - \frac{\theta^2}{2}t - \omega B^H(t) - \frac{\omega^2}{2}t^{2H}\right), t \geq 0 \right\}.$$

Bud'  $f$  funkcia, pre ktorú platí  $\tilde{\mathbb{E}}_t[f(\theta B(T) + \omega B^H(T))] < \infty$ . Potom pre každé  $0 < t \leq T$  platí:

$$\tilde{\mathbb{E}}_t^*[f(\theta B(T) + \omega B^H(T))] = \frac{1}{X(t)} \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ f(\theta B(T) + \omega B^H(T)) X(T) \right].$$

*Dôkaz.* Vid' (Sun, 2013, str. 12). □

**Tvrdenie 9** (Sun, 2013). Bud'  $F \in L^2$  obmedzený,  $\mathcal{F}_T^H$ -merateľný nárok. Pre každý okamžik  $t \in [0, T]$  vieme vyjadriť jeho spravodlivú cenu pomocou

$$F(t) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t[F],$$

kde  $r$  predstavuje konštantnú bezrizikovú úrokovú mieru.

*Dôkaz.* Vid' (Sun, 2013, str. 13). □

Predpokladáme zmiešaný frakcionálny Black-Scholesov trh založený na bezrizikovom aktíve  $\{P(t), t \in \mathbb{R}_+\}$  s konštantnou bezrizikovou úrokovou mierou  $r$  a rizikovom aktíve  $\{S(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ , ktorý sa riadi geometrickým mfBm:

$$dP(t) = rP(t)dt, \quad P(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)d\bar{B}(t) + \sigma S(t)d\bar{B}^H(t), \quad S(0) > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

pričom je  $\bar{B}$  Brownov pohyb a  $\bar{B}^H$  fBm s  $H \in (3/4, 1)$ . Oba sú definované na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  a sú navzájom nezávislé. Nech ďalej platia všetky bežné predpoklady Black-Scholesovho modelu.

Spravíme zmenu premennej  $B(t) + B^H(t) = \sigma^{-1}(\mu - r) + \bar{B}(t) + \bar{B}^H(t)$ . Použitím Girsanovej vety dostaneme vzhľadom ku rizikovo neutrálnej miere:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB(t) + \sigma S(t)dB^H(t), \quad S(0) > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.18)$$

s riešením

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ rt + \sigma B(t) + \sigma B^H(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} \right\}. \quad (1.19)$$

Teraz nám nič nebráni v zavedení oceňovacieho vzorca v ľubovoľnom čase  $t \in [0, T]$  európskej call opcie s realizačnou cenou  $K$  a realizačným časom (taktiež nazývaným *maturita*)  $T \in \mathbb{R}$ .

**Veta 10** (Black-Scholesov oceňovací vzorec). *Cena európskej call opcie na podkladové aktívum  $S$  s realizačnou cenou  $K$  a realizačným časom  $T \in \mathbb{R}$  pre všetky  $t \in [0, T]$  má tvar*

$$C(t, S(t)) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

pričom  $\Phi$  predstavuje distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia v bodoch

$$d_1 = \frac{\log \frac{S(t)}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}},$$

$$d_2 = \frac{\log \frac{S(t)}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}}.$$

*Dôkaz.* Na základe tvrdenia 9 platí:

$$\begin{aligned} C(t, S(t)) &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ e^{-r(T-t)} (S(T) - K)_+ \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [S(T) \mathbf{1}_{[S(T) > K]}] - Ke^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [\mathbf{1}_{[S(T) > K]}]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

**I.** Najprv preskúmame druhú časť 1.20, teda  $\tilde{\mathbb{E}}_t [\mathbf{1}_{[S(T) > K]}]$ . Označme

$$d_2^* = \log \frac{K}{S(0)} - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H},$$

$$y = \frac{x - \sigma B(t) - \sigma B^H(t)}{\sqrt{2\sigma^2(T-t) + T^{2H} - t^{2H}}}. \quad (1.21)$$

Použitím 1.19 dostávame

$$S(T) = S(0) \exp \left\{ rT + \sigma B(T) + \sigma B^H(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} \right\},$$

čo využijeme v prvej rovnosti nižšie:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t [\mathbf{1}_{[S(T) > K]}] &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ \mathbf{1}_{[(\sigma B(T) + \sigma B^H(T)) > d_2^*]} \right] \\ &= \int_{d_2^*}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{(x - \sigma B(t) - \sigma B^H(t))^2}{2\sigma^2(T-t) + T^{2H} - t^{2H}} \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t) + T^{2H} - t^{2H}}} dx && \text{lema 7} \\ &= \int_{\frac{d_2^* - \sigma B(t) - \sigma B^H(t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} dy && \text{substitúcia 1.21} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\sigma(B(t) + B^H(t)) - d_2^*}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} dy && \text{symetria hustoty } N(0,1) \\ &= \Phi(d_2), \end{aligned}$$

pričom posledná rovnosť plynie zo vzťahu

$$\sigma \left( B(t) + B^H(t) \right) = \log \frac{S(t)}{S(0)} - rt + \frac{1}{2}\sigma^2 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}, \quad (1.22)$$

ktorý sme obdržali pomocou 1.19.

**II.** Prípad  $\tilde{\mathbb{E}}_t [S(T)\mathbb{1}_{[S(T)>K]}]$  je komplikovanejší. Uvažujme proces

$$\sigma B^*(t) + \sigma \left( B^H(t) \right)^* = \sigma \left( B(t) - \sigma t \right) + \sigma \left( B^H(t) - \sigma t^{2H} \right). \quad (1.23)$$

Definujeme náhodný proces

$$X(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma B(t) + \sigma B^H(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( t + t^{2H} \right) \right\},$$

ktorý predstavuje súčasnú hodnotu rizikového aktíva v čase  $t \in [0, T]$ . Platí teda  $X(t) = e^{-rt} S(t)$ . Použitím lemy 8 dostávame

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t [S(T)\mathbb{1}_{[S(T)>K]}] &= e^{rT} \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ X(T) \mathbb{1}_{[(\sigma B(t) + \sigma B^H(t)) > d_2^*]} \right] \\ &= e^{rT} X(t) \tilde{\mathbb{E}}_t^* \left[ \mathbb{1}_{[(\sigma B(t) + \sigma B^H(t)) > d_2^*]} \right] \\ &= e^{rT} X(t) \tilde{\mathbb{E}}_t^* \left[ \mathbb{1}_{[S(T)>K]} \right]. \end{aligned}$$

Pretože však podľa 1.19 máme

$$\begin{aligned} \log S(T) &= \log S(0) + rT + \sigma B(T) + \sigma B^H(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} \\ &= \log S(0) + rT + \sigma B^*(T) + \sigma \left( B^H(T) \right)^* + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} \end{aligned}$$

nebudeme môcť využiť  $d_2^*$  z časti I. Označme preto

$$\begin{aligned} d_1^* &= \log \frac{K}{S(0)} - rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}, \\ z &= \frac{x - \sigma B^*(t) - \sigma \left( B^H(t) \right)^*}{\sqrt{2\sigma^2(T - t + T^{2H} - t^{2H})}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ďalej postupujeme ako v časti  $I$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_t^* [\mathbf{1}_{[S(T)>K]}] &= \tilde{\mathbb{E}}_t^* \left[ \mathbf{1}_{[(\sigma B^*(T) + \sigma(B^H(T))^*) > d_1^*]} \right] \\
&= \int_{d_1^*}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{(x - \sigma B^*(t) - \sigma(B^H(t))^*)^2}{2\sigma^2(T-t+T^{2H}-t^{2H})} \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t+T^{2H}-t^{2H})}} dx && \text{lema 7} \\
&= \int_{\frac{d_1^* - \sigma B^*(t) - \sigma(B^H(t))^*}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H}-t^{2H})}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz && \text{substitúcia 1.24} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\sigma(B^*(t) + (B^H(t))^*) - d_1^*}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(T^{2H}-t^{2H})}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz && \text{symetria hustoty } N(0,1) \\
&= \Phi(d_1).
\end{aligned}$$

Podobne ako v  $I$ , aj tu vyplýva posledná rovnosť zo vzťahu 1.22, na ktorý aplikujeme 1.23. Použitím vyššie odvodených rovností dostávame

$$\tilde{\mathbb{E}}_t [S(T)\mathbf{1}_{[S(T)>K]}] = e^{rT} X(t)\Phi(d_1) = e^{T-t} S(t)\Phi(d_1).$$

Použitím výsledkov obdržaných v  $I$  a  $II$  Dostávame

$$\begin{aligned}
C(t, S(t)) &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ e^{-r(T-t)} (S(T) - K)_+ \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [S(T)\mathbf{1}_{[S(T)>K]}] - K e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [\mathbf{1}_{[S(T)>K]}] \\
&= S(t)\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),
\end{aligned}$$

čím je veta 10 dokázaná. □

*Dôsledok.* Použitím put-call parity obdržíme spravodlivú cenu európskej put opcie na podkladové aktívum  $S$  s realizačnou cenou  $K$  a realizačným časom  $T \in \mathbb{R}$  pre všetky  $t \in [0, T]$ :

$$P(t, S(t)) = -S(t)\Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2).$$

Túto kapitolu zakončíme uvedením nadstavieb nami predstaveného modelu. V práci (Wang a kol., 2010) je predstavená modifikácia Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre mfBm model pri predpokladaní výskytu transakčných poplatkov. Pri zmiešaní dvoch vzájomne nezávislých fBm procesov, s rôznymi parametrami  $H_1$  a  $H_2$ , dostaneme takzvaný zmiešaný frakcionálny-frakcionálny Brownov pohyb. Aplikácia tohto procesu na trh spolu s odvodením modifikácie Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre európske opcie vzťahujúce sa na cenu



akcií je možné nájsť v práci (Chen a kol., 2004), kde sa autori obmedzili na  $H_1 \in (1/3, 1) < H_2$ .

Pri skúmaní reálneho vývoja cien aktív na trhu je možné pozorovať takzvané *zhlukovanie volatility*, teda výskyt obdobia s relatívne nízkou intenzitou zmeny (volatility) cien, ktoré nasleduje po období s vysokou intenzitou zmeny cien aktív (respektíve ich *logaritmických výnosov*). Uvažujme náhodnú prechádzku  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , kde  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  predstavuje veľkosť  $i$ -teho skoku, čo znamená že  $S_n$  udáva pozíciu po  $n$ -tom skoku. Z centrálnej limitnej vety vieme, že pre každé  $t \in \mathbb{R}_+$  platí

$$\sqrt{n}S_{[nt]} \xrightarrow{\mathcal{D}} B(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Zavedením náhodnej veličiny  $W_n$ , ktorá predstavuje dĺžku *doby do nasledujúcej udalosti* predchádzajúcu skok  $X_n$ , s mocninovým (po anglicky *power law*) pravdepodobnostným rozdelením  $\mathbb{P}(W_n > t) \sim t^{-\alpha}$  pre  $0 < \alpha < 1$  a  $t \rightarrow \infty$ . Takto definovaná náhodná prechádzka konverguje ku Brownovmu pohybu, kde je čas  $t$  zamenený za náhodný čas  $E(t)$ , čo je neklesajúci náhodný proces. Táto zmena sa dá interpretovať nasledovne: vnútorný čas procesu plynie pomalšie ak sa nič nedeje a rýchlejšie pri výskyte vysokého množstva transakcií.

Táto vlastnosť je výnimočne dôležitá, pretože kompenzuje jednu z hlavných nevýhod Black-Scholesovho modelu, menovite jeho uniformitu. Zamenením času  $t$  v nami definovanom mfBm za  $E(t)$  dostaneme takzvaný *časovo menný zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb*. Jeho aplikáciou na trh je možné obdržať modifikáciu Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre európske opcie vzťahujúce sa na cenu akcií (Guo a Yuan, 2014). Aplikáciu náhodného času  $E(t)$  nazývame subordinácia a je jednou z hlavných tém nasledujúcej kapitoly.

# Kapitola 2

## Lévyho procesy

V tejto kapitole sa budeme venovať Lévyho procesom, ktoré predstavujú zovšeobecnenie Poissonovho procesu a Brownovho pohybu. Teoretické základy boli spracované prevažne z kníh (Sato, 1999) a (Bertoin, 1996).

### 2.1 Základné definície a tvrdenia

Uvažujme stochastickú bázu  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ , teda pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  a na ňom filtráciu  $\mathcal{F}_t$ . Predpokladajme ďalej, že filtrácia  $\mathcal{F}_t$  spĺňa UC (*usual conditions*), teda je sprava spojitá a  $\mathcal{F}_0 \supset \{N \in \mathcal{F}_\infty; \mathbb{P}(N) = 0\}$  ( $\mathcal{F}_0$  obsahuje všetky množiny miery nula).

**Definícia 12.** Lévyho procesom nazveme náhodný proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  na  $\mathbb{R}$  splňujúci nasledujúce podmienky:

1.  $L(0) = 0$  s.u.,
2. má nezávislé a (slabo) stacionárne prírastky,
3.  $L$  je stochasticky spojitý: pre všetky  $t \geq 0$ ,  $0 < \epsilon$  platí

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|L(t) - L(s)| > \epsilon) = 0,$$

4. existuje priestor elementárnych javov  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ ;  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  taký, že pre všetky elementárne javy  $\omega \in \Omega_0$ ,  $L(t; \omega)$  je sprava spojitý s limitami zľava.

*Poznámka 2.1.* Procesy splňujúce podmienku 4 z definície 12 sa v literatúre často nazývajú *càdlàg*, čo pochádza z francúzskeho "*continue à droite, limite à gauche*", teda sprava spojitý s limitami zľava.

Definujeme pojem *nekonečne deliteľná distribúcia* a ukážeme jej blízky vzťah k Lévyho procesom. Označme

$$\mu^{n*} = \overbrace{\mu * \mu * \dots * \mu}^{n \text{ krát}}$$

$n$ -tú konvolúciu miery  $\mu$ .

**Definícia 13.** Povieme, že pravdepodobnostná miera  $\mu$  na  $\mathbb{R}$  je nekonečne deliteľná distribúcia (po anglicky *infinitely divisible distribution*), ak pre každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje pravdepodobnostná miera  $\mu_n$  na  $\mathbb{R}$  pre ktorú platí:

$$\mu = \mu_n^{n*}.$$

*Poznámka 2.2.* Analogicky môžeme písať, že pravdepodobnostná miera  $\mu$  na  $\mathbb{R}$  je nekonečne deliteľná distribúcia, ak existuje náhodná veličina  $X$  s distribúciou  $\mu$  tak, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje postupnosť nezávislých rovnako rozdelených (po anglicky *independent and identically distributed* – skratene *i.i.d.*) náhodných veličín  $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$  ktoré splňujú

$$X = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}.$$

Uvažujme Lévyho proces  $L$ . Chceme ukázať, že pre každé  $t \geq 0$  je distribúcia náhodnej veličiny  $L(t)$  nekonečne deliteľná. Označme  $\mu$  distribúciu  $L(1)$  a zvolme ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$ , ktorým rozdelíme interval  $[0, t]$  na  $n$  častí veľkosti  $t/n$ . Vyjadrením náhodnej veličiny  $L(t)$  pomocou prírastkov  $L$  dostávame

$$L(t) = (L(t_1) - L(t_0)) + \dots + (L(t_n) - L(t_{n-1})), \quad t_k = \frac{kt}{n}.$$

Jednotlivé prírastky sú i.i.d s distribúciou  $\mu_n$  (z bodu 2. definície 12). Z poznámky 2.2 vidíme, že  $L(t)$  má skutočne nekonečne deliteľnú distribúciu. Túto skutočnosť bližšie popisuje nasledujúca veta, ktorú uvedieme v upravenom tvare.

**Veta 11** (Sato, 1999, str. 35). *Buď  $\{L(t), t \geq 0\}$  Lévyho proces, potom má  $L(t)$  nekonečne deliteľnú distribúciu  $\mu_t = \mu^{t*}$  pre každé  $t \geq 0$ , kde  $\mu$  je distribúcia  $L(1)$ . Podobne, pre každú nekonečne deliteľnú distribúciu  $\mu$  existuje Lévyho proces  $L$ , pre ktorý je  $\mu$  distribúcia  $L(1)$ .*

*Dôkaz.* Prvá časť dôkazu plynie z generalizácie motivačného príkladu pred vetou 11. Podrobný dôkaz oboch častí tvrdenia je možné nájsť v práci (Sato, 1999). □

Jedným z nástrojov, ktorý budeme často využívať pri práci s Lévyho procesmi, je *charakteristická funkcia* pravdepodobnostnej miery  $\mu$  na  $\mathbb{R}$ . Na jej definovanie využijeme Lebesgueov-Stieltjesov integrál:

$$\tilde{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} d\mu(x), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pripomeňme, že distribúcia je indukovaná pravdepodobnostná miera. Môžeme teda uviesť tvar charakteristickej funkcie reálnej náhodnej veličiny  $X$  s distribúciou  $P_X$ . Ak má  $P_X$  hustotu  $f_X$ , ide o inverznú *Fourierovu transformáciu* hustoty, teda:

$$\Psi_X(u) = \tilde{P}_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{iux} dx = \mathbb{E}[e^{iuX}], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pomocou charakteristickej funkcie  $\Psi$  môžeme definovať spojitú funkciu  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ktorú nazveme *charakteristický exponent* miery  $\mu$  na  $\mathbb{R}$ :

$$\Theta_\mu(u) = -\log(\tilde{\mu}(u)), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Uvedieme *Lévy-Khintchinovu vetu*, ktorá poskytuje charakteristickú funkciu všetkých nekonečne deliteľných distribúcií a teda všetkých Lévyho procesov. Následne pomocou nej zavedieme *Lévyho trojicu*, ktorá jednoznačne určuje Lévyho proces.

**Veta 12** (Lévy-Khintchinova veta). *Charakteristická funkcia nekonečne deliteľnej distribúcie  $\mu$  má tvar:*

$$\tilde{\mu}(u) = \exp \left\{ iu\gamma - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} \left( e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{|x|<1} \right) d\nu(x) \right\}, u \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

kde  $\sigma^2 \geq 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  a  $\nu$  je miera na  $\mathbb{R}$  splňujúca

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ a } \int_{\mathbb{R}} \min\{|x|^2, 1\} d\nu(x) < \infty. \quad (2.2)$$

Tvar charakteristickej funkcie  $\tilde{\mu}(u)$  je generovaný trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$  jednoznačne. Podobne, buď  $\sigma^2 \geq 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  a  $\nu$  miera splňujúca 2.2, potom existuje práve jedna nekonečne deliteľná distribúcia  $\mu$ , ktorej charakteristická funkcia má tvar 2.1.

*Poznámka 2.3.* V literatúre sa môžeme stretnúť s tvarom Lévy-Khintchinovej vety, ktorá na zavedenie vzťahu 2.1 využíva charakteristický exponent tvaru

$$\Theta_{\mu}(u) = -iu\gamma + \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} \left( 1 - e^{iux} + iux\mathbb{1}_{|x|<1} \right) d\nu(x), u \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

V literatúre sa charakteristický exponent s tvarom z 2.3 nazýva *Lévyho exponent*.

**Definícia 14** (Lévyho trojica). *Trojica  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$  z vety 12 sa nazýva Lévyho trojica (anglicky Lévy triplet) s Lévyho mierou  $\nu$ . V prípade, že  $\sigma^2 = 0$ , hovoríme o takzvanej čisto negausovskej (anglicky purely non-Gaussian) nekonečne deliteľnej distribúcii  $\mu$ .*

Ak Lévyho trojica  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$  generuje distribúciu  $\mu$ , potom  $(t\sigma^2, t\nu, t\gamma)$  generuje  $\mu^{t*}$ . Z vety 11 preto dostávame, že pre  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$  generujúce  $L(1)$ ,  $(t\sigma^2, t\nu, t\gamma)$  generuje  $L(t)$ . Je dobré si uvedomiť ekvivalenciu zápisu  $X = X(1)$ , ako napríklad pri  $\Psi_X(u) = \Psi_{X(1)}(u)$ , ktorú budeme v texte často využívať. Lévyho trojica z definície 14 sa preto v literatúre často nazýva *generujúca trojica* (po anglicky generating triplet) Lévyho procesu. V zmysle poznámky 2.3 môžeme písať:

$$\Psi_{X(t)}(u) = \mathbb{E}[\exp\{iuX(t)\}] = \exp\{-t\Theta_X(u)\}.$$

Lévyho exponent charakterizuje distribúciu jednoznačne v zmysle takom, že ak majú dva Lévyho procesy rovnaký Lévyho exponent, majú taktiež rovnakú distribúciu (Bertoin, 1996). Pozrieme sa ďalej na nutnú a postačujúcu podmienku konečnej variácie Lévyho procesov.

**Veta 13** (Cont a Tankov, 2004). *Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  má konečnú variáciu práve vtedy, keď pre jeho Lévyho trojicu platia nasledujúce dve podmienky*

$$(\sigma^2, \nu, \gamma) = (0, \nu, \gamma),$$

$$\int_{|x| \leq 1} |x| d\nu(x) < \infty. \quad (2.4)$$

*Dôkaz.* Vid' (Cont a Tankov, 2004). □

Ak Lévyho miera  $\nu$  navyše spĺňa podmienku 2.4 z vety 13, potom má charakteristická funkcia konečne deliteľnej distribúcie generovanej Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma_0)$  tvar

$$\tilde{\mu}(u) = \exp \left\{ iu\gamma_0 - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) d\nu(x) \right\}, u \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Parameter  $\gamma_0$  nazveme *driftom* nekonečne deliteľnej distribúcie  $\mu$  (alebo driftom Lévyho procesu  $L$  generovaného Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma_0)$ ). Ďalej si uvedieme základné delenie Lévyho procesov.

**Definícia 15.** Uvažujme  $\{L(t), t \geq 0\}$  Lévyho proces generovaný Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$ . Hovoríme, že  $L$  má

1. konečnú aktivitu ak  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ ,
2. nekonečnú aktivitu ak  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ .

Konečnú aktivitu môžeme interpretovať ako konečný počet skokov Lévyho procesu  $L$  na intervale  $[0, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a *nekonečnú aktivitu* ako nekonečný počet skokov  $L$  na intervale  $[0, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Zavedieme pojem *Poissonova náhodná miera* a ukážeme, aký je medzi ňou a *Lévyho mierou* vzťah. Bud'  $\mathbb{N}_0^*$  rozšírený priestor prirodzených čísel o nulu a nekonečno, teda  $\mathbb{N}_0^* = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ .

**Definícia 16** (Poissonova náhodná miera). Uvažujme priestor  $(E, \mathcal{E})$  a na ňom  $\sigma$ -konečnú mieru  $\mu$ . Rodinu náhodných veličín  $\{N(B), B \in \mathcal{E}\}$  nadobúdajúcich hodnoty z  $\mathbb{N}_0^*$  nazveme Poissonova náhodná miera na  $(E, \mathcal{E})$  s mierou intenzity  $\mu$ , ak platí nasledujúce:

1. pre každé  $B \in \mathcal{E}$  má náhodná veličina  $N(B)$  Poissonovo rozdelenie s intenzitou  $\mu(B)$ ,
2. ak sú  $B_1, \dots, B_n$  disjunktné, potom sú  $N(B_1), \dots, N(B_n)$  nezávislé.

*Poznámka 2.4.* Bud'  $N$  Poissonova miera na  $(E, \mathcal{E})$ . Uvažujme merateľnú transformáciu  $g$  z priestoru  $(E, \mathcal{E})$  do iného merateľného priestoru  $(G, \mathcal{G})$ . Definujme

$$M(B, \omega) = N(g^{-1}(B), \omega), \omega \in \Omega, B \in \mathcal{G},$$

potom je  $M$  Poissonova náhodná miera na  $(G, \mathcal{G})$  s mierou intenzity  $\nu = \nu(g^{-1}(B))$ .

Uvažujme zložený Poissonov proces (o zloženom Poissonovom procese pojednávame v časti 2.2.2) pozostávajúci z Poissonovho procesu  $N_t$  (Poissonov proces označujeme dolným indexom, aj keď nejde o postupnosť, pre rozlíšenie od Poissonovej miery) s intenzitou  $\lambda > 0$  a i.i.d. náhodných veličín  $Y_1, Y_2, \dots$  nezávislých od  $N_t$ . Bud'  $A \subset \mathbb{R}$ , potom definujeme proces  $\{K(t, A), t \geq 0\}$ , kde

$$K(t, A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{[t_i \leq t]} \mathbb{1}_{[Y_i \in A]},$$

pričom  $t_i$  značí čas skoku  $Y_i$ . Tento proces udáva počet skokov  $Y_i$  z množiny  $A$ , ktoré sa vyskytli do času  $t$ . Potom môžeme  $K$  chápať ako dvoj-parametrickú rodinu náhodných veličín, ktorá definuje Poissonovu náhodnú mieru

$$p([0, t] \times A) := K(t, A), \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{B}, \quad (2.6)$$

(Korn a kol., 2010).

**Definícia 17** (skoková miera). *Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$ . Skoky procesu  $L$  definujeme ako  $\Delta L(t; \omega) = L(t; \omega) - L(t-; \omega)$ ,  $\omega \in \Omega_0$ . Následne pre všetky merateľné podmnožiny  $B \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$  zavedieme skokovú mieru procesu  $L$  ako*

$$J(B, \omega) = \begin{cases} \sum_{s \geq 0} \mathbb{1}_{[(s, \Delta L(s; \omega)) \in B]}, & \text{ak } \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{ak } \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$

pričom  $\Omega_0$  pochádza z definície 12.

Voľbou  $B = [0, t] \times A$ ,  $t \geq 0$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  môžeme vidieť paralelu medzi Poissonovou náhodnou mierou a skokovou mierou Lévyho procesu. Ďalej platí nasledujúci vzťah medzi skokovou mierou  $J$  a Lévyho mierou  $\nu$ :

$$\nu(A) = \mathbb{E} \left[ J([0, 1] \times A) \right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

**Veta 14** (Korn a kol., 2010, str. 322). *Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  generovaný Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$ . Potom je jeho skoková miera  $J$  Poissonovou mierou na  $[0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  s mierou intenzity  $d\nu(x)$  a  $L(t)$  má rozklad*

$$L(t) = \underbrace{t\gamma + \sigma B(t)}_{L_1(t)} + \underbrace{\int_{|x| \geq 1} x dJ([0, t] \times x)}_{L_2(t)} + \underbrace{\int_{|x| < 1} x d \left( J([0, t] \times x) - t\nu(x) \right)}_{L_2(t)}, \quad (2.7)$$

kde  $B$  je Brownov pohyb nezávislý od  $J$ .

*Dôkaz.* Vid' (Sato, 1999). □

*Poznámka 2.5.* Mieru  $\left( J([0, t] \times B) - t\nu(B) \right)$  z vety 14 voláme *kompensovaná Poissonova miera*.

*Poznámka 2.6.* Pre  $\sigma = 0$  nám mizne z rozkladu 2.7 časť s Brownovým pohybom, z čoho pochádza termín *čisto negausovská* distribúcia z definície 14. Môžeme taktiež hovoriť o *čisto negausovskom* Lévyho procese.

Veta 14 sa nazýva *Itô-Lévyho rozklad*. Medzi ňou a Lévy-Khintchinovou vetou môžeme pozorovať vzťahy zhrnuté v nasledujúcom dôsledku.

*Dôsledok.* Bud'  $\{L(t), t \geq 0\}$  Lévyho proces generovaný Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$ . Z viet 11 a 14 vieme, že  $L$  má rozklad 2.7 a distribúciu  $\mu$  s charakteristickou funkciou tvaru 2.1. Na základe 2.7 vieme usúdiť, že Lévyho proces je suma:

1. lineárnej transformácie  $L_1$  Brownovho pohybu s driftom,

2. skokového procesu  $L_2$  skokov absolútnej veľkosti aspoň jedna,
3. kompenzovaného skokového procesu  $L_3$  skokov absolútnej veľkosti menšej ako jedna.

Tieto tri procesy majú charakteristické funkcie

1.  $\tilde{\mu}_1(u) = \exp \left\{ iu\gamma - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 \right\},$
2.  $\tilde{\mu}_2(u) = \exp \left\{ \int_{|x| \geq 1} (e^{iux} - 1) d\nu(x) \right\},$
3.  $\tilde{\mu}_3(u) = \exp \left\{ \int_{|x| < 1} (e^{iux} - 1 - iux) d\nu(x) \right\},$

pričom vidíme, že tieto tri charakteristické funkcie tvoria rozklad charakteristickej funkcie nekonečne deliteľnej distribúcie z 2.1, teda

$$\tilde{\mu}(u) = \tilde{\mu}_1(u)\tilde{\mu}_2(u)\tilde{\mu}_3(u).$$

## 2.2 Príklady Lévyho procesov

Uvedieme najčastejšie príklady Lévyho procesov, ktoré je možno nájsť v literatúre. Preskočíme najzákladnejší typ, menovite *Brownov pohyb*, ktorý je generovaný Lévyho trojicou  $(0, \sigma, 0)$ . Pre každý príklad uvedieme tvar jeho charakteristickej funkcie a Lévyho trojice spolu s tvarmi základných momentov jeho *rezovej distribúcie* (anglicky *sliced distribution*), ako sú stredná hodnota, rozptyl, šikmosť a špicatosť.

### 2.2.1 Poissonov proces

Ak má náhodná veličina  $X$  Poissonovo rozdelenie na  $\mathbb{N}$  s intenzitou  $\lambda$ , píšeme

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Po(\lambda),$$

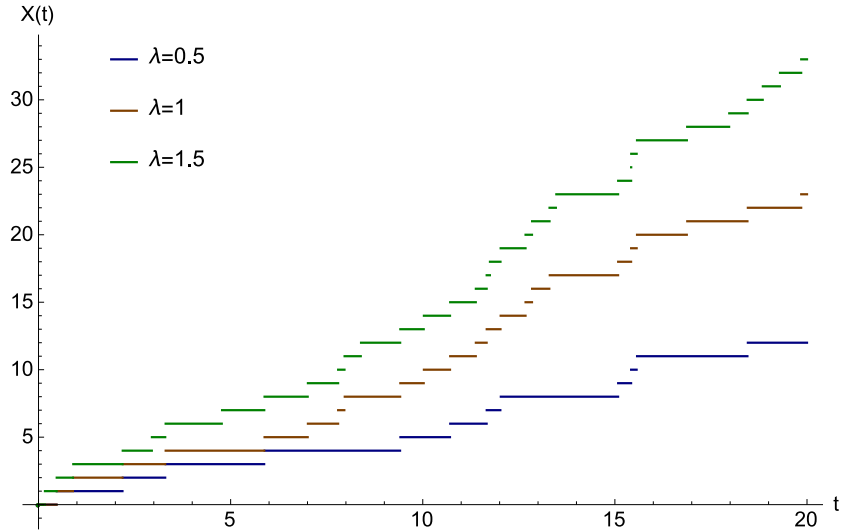
$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Pre jej charakteristickú funkciu platí

$$\Psi_X(u; \lambda) = \exp \left\{ \lambda(e^{iu} - 1) \right\}.$$

Moment	Hodnota
Stredná hodnota	$t\lambda$
Rozptyl	$t\lambda$
Šikmosť	$1/\sqrt{t\lambda}$
Špicatosť	$3 + 1/t\lambda$

Tabuľka 2.1: Momenty rezovej distribúcie Poissonovho procesu v bode  $t \geq 0$ .



Obr. 2.1: Trajektórie Poissonovho procesu s intenzitami  $\lambda = 0.5, \lambda = 1, \lambda = 1.5$  pre rovnaký RandomSeed.

Proces  $\{X(t), t \geq 0\}$  nazveme *Poissonov proces* s intenzitou  $\lambda > 0$ , ak je Lévyho proces a  $X(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} Po(t\lambda)$  pre  $t \geq 0$ . Ide o proces ktorý tvoria iba skoky o veľkosti 1, preto pre elementy jeho Lévyho trojice platí

$$\sigma^2 = 0, \gamma = 0.$$

Lévyho miera má tvar  $\nu = \lambda\delta(1)$ , kde  $\delta$  predstavuje Diracovu mieru. Dostávame teda Lévy trojicu  $(0, \lambda\delta(1), 0)$ . Pre momenty jeho rezovej distribúcie v bode  $t \geq 0$  platia vzťahy uvedené v tabuľke 2.1. Trajektórie Poissonovho procesu pre rôzne hodnoty  $\lambda$  sú znázornené na obrázku 2.1.

### 2.2.2 Zložený Poissonov proces

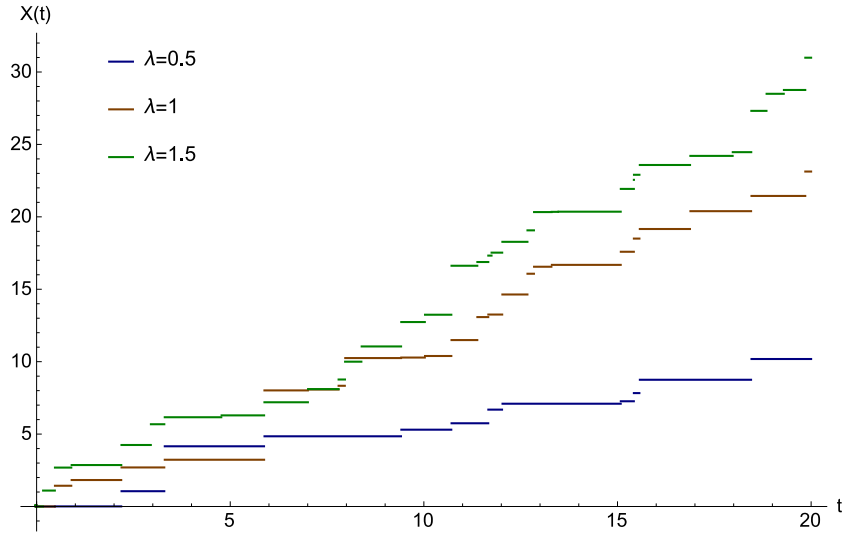
Uvažujme Poissonov proces  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  s intenzitou  $\lambda > 0$  a postupnosť i.i.d náhodných veličín  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  nezávislých od Poissonovho procesu  $N$ , ktoré majú rozdelenie  $P_Y$ , pričom  $P_Y(\{0\}) = 0$ . Potom proces

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

Moment	Hodnota
Stredná hodnota	$t\lambda/\eta$
Rozptyl	$2t\lambda/\eta^2$
Šikmost	$3/\sqrt{2t\lambda}$
Špicatost	$6/t\lambda + 3$

Tabuľka 2.2: Momenty rezovej distribúcie zloženého Poissonovho procesu v bode  $t \geq 0$ , kde má postupnosť  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  i.i.d. náhodných veličín exponenciálne rozdelenie s parametrom  $\eta$ .





Obr. 2.2: Trajektórie zloženého Poissonovho procesu s intenzitami  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1.5$  a postupnosť  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  i.i.d. náhodných veličín exponenciálne rozdelenie s parametrom  $\eta$  pre rovnaký RandomSeed.

nazveme zložený Poissonov proces vzhľadom ku  $\lambda$  a  $P_Y$ . Zložený Poissonov proces je Lévyho proces a pre jeho charakteristickú funkciu platí

$$\Psi_{X(t)}(u; \lambda, P_Y) = \exp \left\{ t \lambda \left( \tilde{P}_Y(u) - 1 \right) \right\} = \exp \left\{ t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \lambda dP_Y(x) \right\}, u \in \mathbb{R}.$$

Tak, ako pri Poissonovom procese, opäť ide o negausovský proces s náhodnou výškou skokov distribúcie  $P_Y$  a intenzitou  $\lambda$ . Jeho Lévyho trojica má tvar

$$\left( 0, \lambda dP_Y(x), \lambda \int_{-1}^1 x dP_Y(x) \right).$$

Jedným z častých rozdelení  $P_Y$  využívaných v súvislosti so zloženým Poissonovým procesom je exponenciálne rozdelenie. Uvedieme preto vlastnosti a trajektórie zloženého Poissonovho procesu pre  $Y_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{Exp}(\eta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Pre momenty jeho rezovej distribúcie v bode  $t \geq 0$  platia vzťahy uvedené v tabuľke 2.2. Trajektórie zloženého Poissonovho procesu pre rôzne hodnoty  $\lambda$  a pri pevne stanovenom  $\eta = 1$  sú znázornené na obrázku 2.2.

### 2.2.3 Gamma proces

Gamma rozdelenie  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$  je spojité rozdelenie na kladnej reálnej osi s parametrami  $\alpha > 0, \beta > 0$  a hustotou

$$f_{\text{Gamma}}(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x \in \mathbb{R}_+,$$

kde  $\Gamma$  predstavuje gamma funkciu. Charakteristická funkcia tohto rozdelenia je daná predpisom

$$\Psi_{\text{Gamma}}(u) = \left( 1 - i \frac{u}{\beta} \right)^{-\alpha}.$$

Moment	Hodnota
Stredná hodnota	$t\alpha/\beta$
Rozptyl	$t\alpha/\beta^2$
Šikmost	$2/\sqrt{t\alpha}$
Špicatosť	$3(1 + 2/t\alpha)$

Tabuľka 2.3: Momenty rezovej distribúcie Gamma procesu v bode  $t \geq 0$ .

Proces  $\{X(t), t \geq 0\}$  nazveme *gamma proces*, ak je Lévyho procesom a jeho prírastky majú gamma rozdelenie. Dostávame tak  $X(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{Gamma}(t\alpha, \beta)$ . Jeho Lévyho trojica je tvaru

$$\left(0, \alpha x^{-1} e^{-\beta x} dx, \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta})\right).$$

Pre momenty jeho rezovej distribúcie v bode  $t \geq 0$  platia vzťahy uvedené v tabuľke 2.3.

## 2.2.4 Inverzný gausovský proces

Inverzné gausovské rozdelenie  $IG(\alpha, \beta)$  je spojité rozdelenie na kladnej reálnej osi s parametrami  $\alpha > 0, \beta > 0$  a hustotou

$$f_{IG}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha\beta}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \beta^2 x) \right\}, x \in \mathbb{R}_+.$$

Charakteristická funkcia tejto distribúcie je

$$\Psi_{IG}(u; \alpha, \beta) = \exp \left\{ -\alpha \left( \sqrt{\beta^2 - i2u} - \beta \right) \right\}.$$

Proces  $\{X(t), t \geq 0\}$  nazveme *inverzný gausovský proces*, ak je Lévyho procesom a jeho prírastky majú inverzné gausovské rozdelenie. Dostávame tak  $X(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} IG(t\alpha, \beta)$ . Jeho Lévyho trojica je tvaru:

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha x^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\beta^2 x}{2} \right\}, \frac{\alpha}{\beta}(2\Phi(\beta) - 1)\right),$$

kde  $\Phi$  je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Pre momenty jeho rezovej distribúcie v bode  $t \geq 0$  platia vzťahy uvedené v tabuľke 2.4.

Moment	Hodnota
Stredná hodnota	$t\alpha/\beta$
Rozptyl	$t\alpha/\beta^3$
Šikmost	$3\sqrt{t\alpha\beta}$
Špicatosť	$3(1 + 5/(t\alpha\beta))$

Tabuľka 2.4: Momenty rezovej distribúcie inverzného gausovského procesu v bode  $t \geq 0$ .

*Poznámka 2.7.* Gamma rozdelenie z 2.2.3 a inverzné gausovské rozdelenie z 2.2.4 sú špeciálnym prípadom *obecného inverzného gausovského rozdelenia*. Jeho podrobný opis je možné nájsť v práci (Schoutens, 2003, str. 54).

## 2.3 Subordinátory

V tejto časti sa budeme venovať podskupine Lévyho procesov, takzvaným *subordinátorom*. Uvedieme základné definície, vety a predstavíme ich využitie vo finančnej matematike.

**Definícia 18.** Subordinátor  $\{T(t), t \geq 0\}$  nazveme *taký Lévyho proces, ktorého trajektórie sú neklesajúce*.

Všetky príklady uvedené v podkapitole 2.2 sú subordinátory. Môžeme si všimnúť, že všetky majú parameter  $\sigma^2$  Lévyho trojice rovný nule. Tento jav je vysvetlený v nasledujúcej vete.

**Veta 15.** Lévyho proces  $\{T(t), t \geq 0\}$  na  $\mathbb{R}$  je subordinátor práve vtedy, keď je jeho Lévyho trojica tvaru  $(0, \nu, \gamma)$  a jeho Lévyho miera spĺňa  $\nu(\mathbb{R}_-) = 0$  a

$$\int_0^\infty \min\{x, 1\} d\nu(x) < \infty. \quad (2.8)$$

*Dôkaz.* Z definície 18 vieme, že  $T$  je subordinátor práve vtedy, ak má monotónne trajektórie s nezápornými skokmi. Prvá časť dôkazu je ekvivalentná preukázaniu konečnej variácie. Tú však dostávame z vety 13. Podmienka nezáporných skokov je ekvivalentná podmienke

$$K(t) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_{[\Delta T(s) \in (-\infty, 0)]} = 0, t \geq 0.$$

Proces  $K$  nazývame Poissonov bodový proces s mierou  $\nu$ . Zo základných vlastností týchto procesov vieme, že  $K(t) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[K(t)] = 0$  (Kingman, 1972). Pretože strednú hodnotu Poissonovho bodového procesu môžeme napísať ako  $\mathbb{E}[K(t)] = t\nu((-\infty, 0))$ , dostávame dôkaz znenia vety 15. □

Na začiatku kapitoly sme uviedli tvar charakteristickej funkcie pravdepodobnostnej miery  $\mu$  na  $\mathbb{R}$ . Pri práci so subordinátormi sa však preferuje využitie *Laplacovej transformácie* pravdepodobnostnej miery  $\mu$  na nezápornej reálnej osi, ktorá má tvar:

$$\mathcal{L}_\mu(u) = \int_{[0, \infty)} e^{-ux} d\mu(x), u \geq 0.$$

**Veta 16.** Uvažujme dve distribúcie  $\mu_1$  a  $\mu_2$  na  $[0, \infty)$ , pre ktoré platí  $\mathcal{L}_{\mu_1}(u) = \mathcal{L}_{\mu_2}(u)$  pre všetky  $u \geq 0$ , potom  $\mu_1 = \mu_2$ .

*Dôkaz.* Vid' Sato (1999). □

Nakoľko proces  $T$  spĺňa podmienky vety 13, z 2.5 môžeme písať

$$\Upsilon_T(u) = \Theta_T(iu) = u\gamma_0 + \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) d\nu(x), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Funkciu  $\Upsilon_T(u)$  z 2.9 nazveme *Laplacovým exponentom subordinátora  $T$* , pričom už vieme, že  $\gamma_0$  predstavuje drift Lévyho procesu a teda subordinátora  $T$ . Z vety 16 vieme, že  $\Upsilon_T$  určuje distribúciu subordinátora  $T$  jednoznačne. Podobne ako v prípade charakteristickej funkcie, môžeme písať:

$$\mathbb{E}[\exp\{-uT(t)\}] = \exp\{-t\Upsilon_T(u)\}.$$

Pozrime sa bližšie, akú úlohu zohráva drift v subordinátoroch.

**Veta 17.** *Uvažujme subordinátor  $T$  s driftom  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ , Lévyho trojica má teda tvar  $(0, \nu, \gamma_0)$ . Potom platí*

$$\frac{T(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{D}} \gamma_0,$$

pre  $t \rightarrow \infty$ .

*Dôkaz.* Z Lévy-Khintchinovej vety a 2.9 vieme, že subordinátor  $T$  môžeme rozdeliť na  $T(t) = t\gamma_0 + \mathcal{T}(t)$ , kde  $\mathcal{T}$  je taktiež subordinátor s nulovým driftom a Laplacovým exponentom

$$\Upsilon_{\mathcal{T}}(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) d\nu(x).$$

Na to, aby celý subordinátor  $T$  konvergoval v pravdepodobnosti k driftu  $\gamma_0$ , stačí teda ukázať, že  $\mathcal{T}(t) = o(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$ . My však vieme, že

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ -u \left( \frac{\mathcal{T}(t)}{t} \right) \right\} \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left\{ -t \Upsilon_{\mathcal{T}} \left( \frac{u}{t} \right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -t \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{ux}{t}}) d\nu(x) \right\} = 1; \quad u \geq 0, \end{aligned}$$

podľa Lebesgovej vety o zámene limity a integrálu. Dostávame teda, že  $\mathcal{T}/t$  konverguje k nule slabo a preto konverguje v pravdepodobnosti pre  $t \rightarrow 0$ . □

### 2.3.1 Stabilné subordinátory

V tejto časti uvedieme základné vlastnosti *stabilných* subordinátorov, pričom poukážeme na ich spoločné prvky so sebedobnými procesmi definovanými v 2.

**Definícia 19.** *Hovoríme, že náhodná veličina  $X$  má stabilné rozdelenie s parametrom  $\alpha$ , (píšeme  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu_S)$ ) ak má charakteristickú funkciu tvaru*

$$\Psi_X(u) = \begin{cases} \exp \left\{ -|\sigma u|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sgn}(z) \tan \left( \frac{1}{2}\pi\alpha \right) \right) + i\mu_S u \right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ -|\sigma u| \left( 1 + \frac{2}{\pi} i\beta \operatorname{sgn}(z) \log(|z|) \right) + i\mu_S u \right\}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

kde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$  a  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Hlavným dôvodom častého využitia stabilnej distribúcie vo financiách je jej vlastnosť ťažkých chvostov. Parameter  $\alpha$  sa nazýva index stability, alebo index chvostu, čo nám napovedá akú úlohu zohráva. Zvyšné parametre udávajú mieru  $\sigma$ , šikmost  $\beta$  a posun  $\mu_S$ . Ak teda platí  $\beta = 0$ , ide o symetrickú distribúciu. Dva špeciálne prípady stabilnej distribúcie je gausovský prípad ( $\alpha = 2$ ) a Cauchyho prípad ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ). Stabilný Lévyho proces s parametrom  $\alpha$  na intervale  $[0, T]$  nazveme proces s i.i.d. prírastkami s rozdelením  $S_\alpha(T^{1/\alpha}\sigma, \beta, 0)$ . Príklad jeho trajektórie môžeme vidieť na obrázku 2.5(b). Bertoin však uvádza inú definíciu stabilného procesu s parametrom  $\alpha$ :

**Definícia 20** (Bertoin, 1996). *Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  a parameter  $0 < \alpha \leq 2$ . Proces  $L$  nazveme stabilným procesom s parametrom  $\alpha$ , ak pre každé  $k > 0$  jeho charakteristický exponent splňuje*

$$\Theta(ku) = k^\alpha \Theta(u), u \in \mathbb{R}.$$

*Dôsledok.* Definícia 20 je ekvivalentná podmienke

$$\{L(kt); t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{k^{1/\alpha}L(t); t \geq 0\}.$$

Môžeme teda povedať, že  $\alpha$ -stabilný proces je  $(1/\alpha)$ -sebebepodobný proces.

**Veta 18** (Sato, 1999, str. 78). *Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  s Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$ . Nech  $0 < \alpha < 2$ , potom je Lévyho proces  $L$  stabilný s parametrom  $\alpha$  práve vtedy, keď  $\sigma^2 = 0$  a pre jeho Lévyho mieru platí*

$$d\nu(u) = \begin{cases} C_1/u^{1+\alpha}du, & \text{pre } u \in (0, \infty), \\ C_2/|u|^{1+\alpha}du, & \text{pre } u \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

kde platí  $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$  a súčasne  $C_1 + C_2 > 0$ .

*Dôkaz.* Dôkaz pre obecnější znenie vety je možné nájsť v práci (Sato, 1999, str. 79). □

*Dôsledok* (Bertoin, 1996). Špecificky pre subordinátor  $\{T(t), t \geq 0\}$  môžeme povedať, že ide o stabilný subordinátor s parametrom  $0 < \alpha < 1$ , ak pre jeho Laplacov exponent platí

$$\Upsilon_T(u) = u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) x^{-1-\alpha} dx. \quad (2.11)$$

Zmenšenie intervalu, z ktorého  $\alpha$  vyberáme, je zapríčinené podmienkou 2.8. Dávame do pozornosti čitateľa, že stabilný subordinátor má nulový drift.

Na základe 2.11 a vlastností spomenutých vyššie môžeme písať:

$$\mathbb{E}[\exp\{-uT(t)\}] = \exp\{-t\Upsilon_T(u)\} = \exp\{-tu^\alpha\}.$$

Uvažujme ďalej proces  $\{E(t), t \geq 0\}$ , ktorý udáva prvý prechod stabilného subordinátora  $T$  s parametrom  $\alpha$  nad úroveň  $t$ . Píšeme

$$E(t) = \inf \{x; T(x) > t\}. \quad (2.12)$$

Tento proces sa v literatúre nazýva *inverzný stabilný subordinátor s parametrom  $\alpha$*  (po anglicky *inverse  $\alpha$ -stable subordinator*) a je špeciálnym prípadom *nárazového procesu* (po anglicky *hitting time process*). Nasledujúca veta nám povie, akú úlohu zohráva parameter  $\alpha$  v procese  $E$ .

**Veta 19.** *Uvažujme stabilný subordinátor  $\{T(t), t \geq 0\}$  s parametrom  $0 < \alpha < 1$  a proces  $E$  definovaný predpisom 2.12. Potom je proces  $E$  sebezpodobný proces s parametrom  $\alpha$  v zmysle definície 2.*

*Dôkaz.* Z 2.12 je zrejmé, že proces  $E$  má spojité trajektórie. Je preto spojitý v pravdepodobnosti a distribúcii. Proces  $T$  je subordinátor a má teda neklesajúce cádlág trajektórie, čím dostávame:

- ak  $T(x) \geq t$ , potom pre všetky  $y > x$  platí  $T(y) > t$  tak, že  $E(t) \leq x$ ;
- pri dostatočne malom  $\varepsilon > 0$ , pre všetky  $y \in (x, x + \varepsilon)$  platí: ak  $T(x) < t$ , potom  $T(y) < t$  tak, že  $E(t) > x$ .

Pre ľubovoľné postupnosti  $\{t_i\}_{i=1}^m$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_m$  a  $\{x_i > 0\}_{i=1}^m$  teda platí:

$$\{E(t_i) \leq x_i; i = 1, \dots, m\} = \{T(x_i) \geq t_i; i = 1, \dots, m\}. \quad (2.13)$$

Pevne stanovme postupnosti  $\{t_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{x_i\}_{i=1}^m$  a všade uvažujme  $i = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E(kt_i) \leq x_i) &= \mathbb{P}(T(x_i) \geq kt_i) = \mathbb{P}\left((k^{-\alpha})^{1/\alpha} T(x_i) \geq t_i\right) \\ &= \mathbb{P}(T(k^{-\alpha} x_i) \geq t_i) = \mathbb{P}(E(t_i) \leq k^{-\alpha} x_i) \\ &= \mathbb{P}(k^\alpha E(t_i) \leq x_i), \end{aligned}$$

čím je veta dokázaná. □

Proces  $E$  z 2.12 nemá nezávislé, ani stacionárne prírastky (Meerschaert a Scheffler, 2004) a nejedná sa teda o Lévyho proces. Jednou z hlavných úloh, na ktoré sa subordinátory vo financiách využívajú, je ich zámena za čas vo finančných modeloch. Nasledujúca veta nám tento proces spresní.

**Veta 20.** *Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  s Lévyho trojicou  $(\sigma_L^2, \nu_L, \gamma_L)$  a subordinátor  $\{T(t), t \geq 0\}$  s Lévyho trojicou  $(0, \nu_T, \gamma_T)$ . Predpokladajme, že  $L$  a  $T$  sú medzi sebou nezávislé. Definujme proces:*

$$\{X(t) = L(T(t)), t \geq 0\}. \quad (2.14)$$

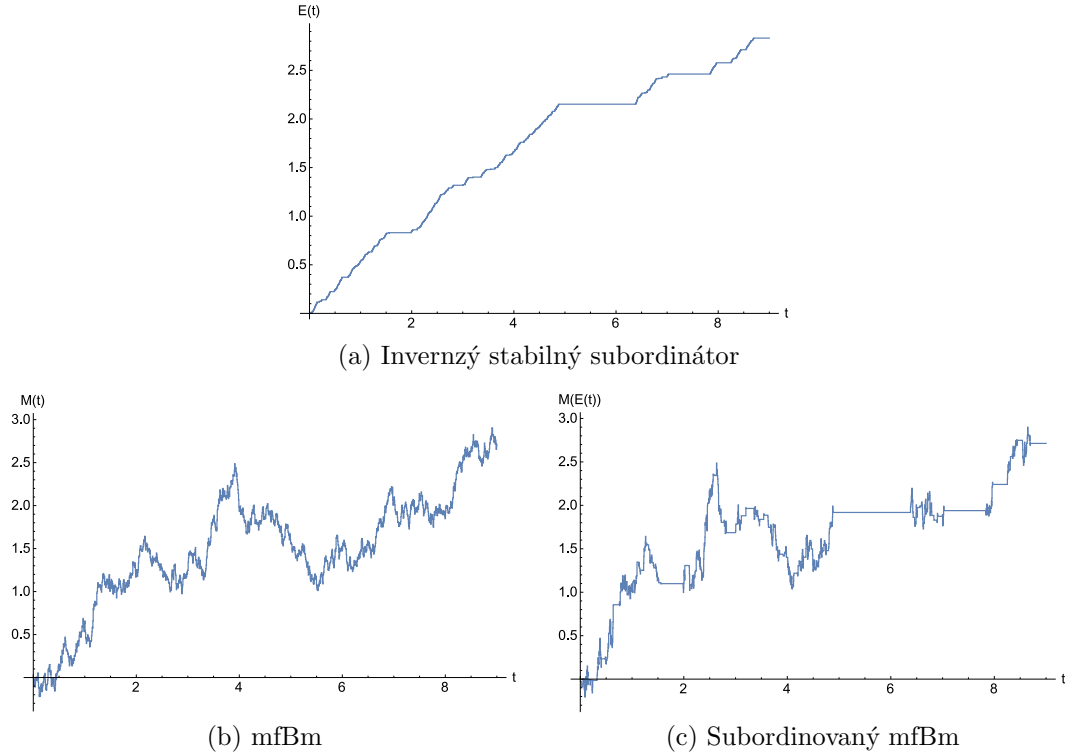
*Potom je proces  $X$  tiež Lévyho proces, pre ktorého charakteristickú funkciu platí:*

$$\Psi_{X(t)}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX(t)}\right] = \exp\left\{-t\Upsilon_T(\Theta_L(u))\right\}, u \in \mathbb{R}.$$

**Definícia 21.** *Transformáciu 2.14 procesu  $L$  na proces  $X$  nazývame subordinácia pomocou subordinátora  $Z$ .*

Podrobný popis procesu subordinácie spolu s hlavnými vlastnosťami výsledného procesu  $X$  je možné nájsť v práci (Sato, 1999, str. 198). Na obrázku 2.3 môžeme vidieť subordináciu mfBm pomocou inverzného stabilného subordinátora s parametrom  $\alpha = 0.8$ .

*Poznámka 2.8.* Na simuláciu subordinovaného stabilného Lévyho procesu využijeme procedúru predstavenú v (Magdziarz a Weron, 2007).



Obr. 2.3: Subordinácia mfBm  $M^H$  z definície 10 s parametrom  $H = 0.85$  pomocou inverzného stabilného subordinátora s parametrom  $\alpha = 0.8$  na subordinovaný proces.

## 2.4 Modelovanie úrokových mier

Najznámejší nástroj pre modelovanie krátkodobých úrokových mier je *Vašíčkov model*, ktorý roku 1977 predstavil Oldřich Alfons Vašíček. Vychádza z Lévyho procesu nazývaného Ornstein–Uhlenbeckov proces (skrátene OU proces). Napriek jeho častému využitiu má tento model svoje nevýhody. Jednou z najzreteľnejších je nenulová pravdepodobnosť záporných úrokových mier. Ide o prípad kedy by ľudia „platili bankám“, aby si u nich mohli uložiť peniaze. Táto situácia je v mysli bežných ľudí nepredstaviteľná, avšak, ako sme sa presvedčili v minulosti, nie je nemožná. Napríklad v roku 2012 malo Dánsko záporné úrokové miery pre vklady. V čase písania tejto práce prebiehajú diskusie medzi Európskymi bankami o prekročení nulovej hranice do záporných hodnôt. V prípade niektorých bánk, napr. ECB, SNB, Riksbank a Denmarks Nationalbank, došlo už dokonca k implementácii.

**Definícia 22.** Uvažujme Lévyho proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  s Lévyho trojicou  $(\sigma^2, \nu, \gamma)$  a náhodnú veličinu  $X_0$  nezávislú od procesu  $L$ . Proces  $\{X(t), t \geq 0\}$  definovaný predpisom

$$X(t) = e^{-\theta t} X(0) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s), \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

nazveme proces Ornstein–Uhlenbeckovho typu (skrátene typu OU).

Ako už bolo zmienené, predpoklad normality dát je často nereálny, pričom empirické štúdie vedú na využitie distribúcií s ťažkými chvostmi (Loretan a Phillips, 1994; Barndorff-Nielsen a Shephard, 2001). V tejto časti preto predstavíme

stabilný Lévyho proces Ornstein–Uhlenbeckovho typu s parametrom  $\alpha$ , ktorý budeme subordinovať pomocou inverzného stabilného subordinátora  $E$  s parametrom  $\kappa$ . Proces typu OU so stabilným Lévyho procesom bol v práci (Barndorff-Nielsen a Shephard, 2001) analyzovaný a následne vyhodnotený ako vhodný proces na simulovanie finančných dát. Následnou subordináciou sa budeme snažiť modelovať zhlukovanie volatility.

Definíciu procesu typu OU môžeme obohatiť o drift  $\mu$  pridaním  $\mu(1 - \exp\{-\theta t\})$  do 2.15. Lokálne chovanie takéhoto procesu s driftom  $\mu$  sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou (skrátene SDR):

$$dX(t) = \theta (\mu - X(t)) dt + \sigma dL(t), \quad t \geq 0, \quad (2.16)$$

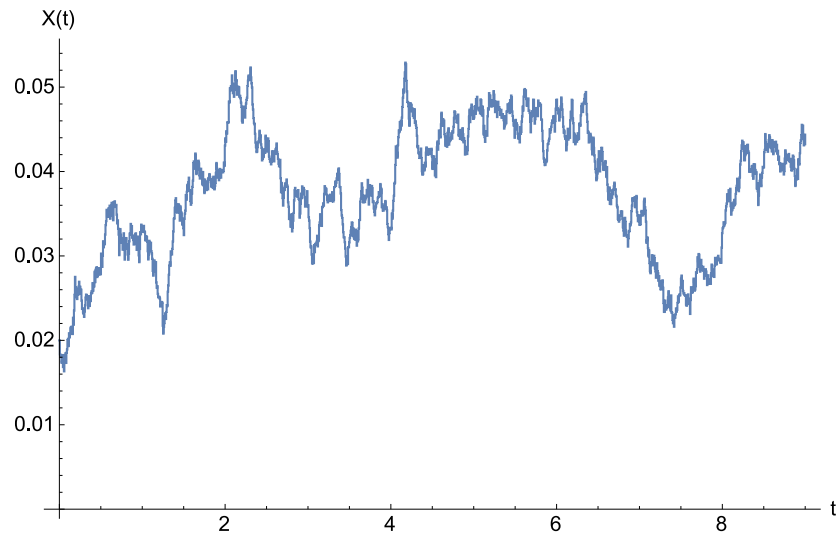
s unikátnym riešením:

$$X(t) = e^{-\theta t} X(0) + \mu (1 - \exp\{-\theta t\}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s), \quad t \geq 0, \quad (2.17)$$

pričom je zrejmé, že ide o Markovov proces. Parameter  $\mu$  sa nazýva *dlhodobý priemer* a  $\theta$  parameter *návratu ku dlhodobému priemeru* (anglicky *mean reversion parameter*). Využitím Brownovho pohybu ako Lévyho procesu z definície 22 dostaneme už spomenutý Vašíčkov model (viď obrázok 2.4), ktorý predpokladá, že analyzované dáta majú normálne rozdelenie. My zoberieme za proces  $L$  z definície 22 stabilný Lévyho proces s parametrom  $\alpha$ . Následne aplikujeme subordináciu pomocou inverzného stabilného subordinátora s parametrom  $\kappa$ . Dostávame teda SDR

$$dX_\alpha(E_\kappa(t)) = \theta (\mu - X_\alpha(E_\kappa(t))) dE_\kappa(t) + \sigma dZ_\alpha(E_\kappa(t)), \quad t \geq 0. \quad (2.18)$$

Trajektórie inverzného stabilného subordinátora  $E_\alpha$ , stabilného procesu  $X_\alpha$  typu OU a subordinovaného stabilného procesu  $X_\alpha(E_\kappa)$  typu OU sú znázornené na obrázku 2.5. Môžeme si všimnúť vysokých skokov procesu  $X_\alpha$  ktoré indikujú výskyt ťažkých chvostov distribúcie procesu, čím sa líši od Vašíčkovho modelu (teda gausovského procesu typu OU). Taktiež si môžeme na obrázku 2.5 všimnúť konštantné



Obr. 2.4: Trajektórie gausovského OU procesu s počiatkom  $X(0) = 0.02$  a parametrami  $\theta = 0.5$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma = 0.02$ .



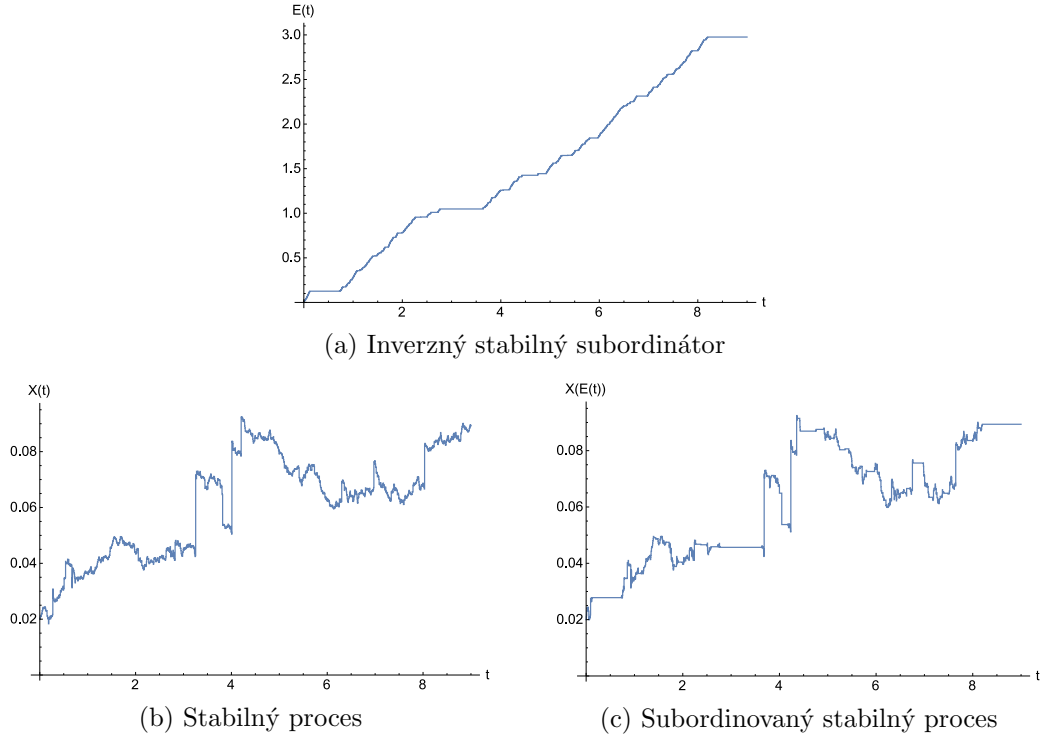
úseky trajektórie procesu  $X_\alpha(E_\kappa)$ , ktoré vznikli subordináciou pomocou procesu  $E_\kappa$ .

Nami predstavená procedúra odhadu parametrov procesu  $X_\alpha(E_\kappa)$  sa skladá z dekompozičnej a odhadovej časti. Predpokladajme skúmaný súbor dát znázornený vektorom  $\mathbf{Y} = (Y(t_1), \dots, Y(t_n))$  dĺžky  $n$ , ktorý obsahuje pozorovania v diskretných časoch  $\{t_i\}_{i=1}^n$ . Tieto pozorovania sa budeme snažiť očistiť o vplyv inverzného subordinátora  $E_\kappa$ . V odhadovej časti budeme vychádzať z diskretizácie SDR 2.16, kde za Lévyho proces  $L$  zoberieme stabilný Lévyho proces  $Z_\alpha$ . Dostávame

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \theta (\mu - X(t)) \Delta t + (\Delta t)^{1/\alpha} Z_t, \quad t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, \quad (2.19)$$

kde  $\{Z(t + \Delta t) - Z(t)\}_{t=\Delta t, 2\Delta t, \dots}$  je postupnosť i.i.d náhodných veličín s distribúciou z definície 19. Z výrazu 2.19 nám zmizol parameter  $\sigma$ , pretože, ak  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ , kde  $\alpha \neq 1$ , potom pre náhodnú veličinu  $Y = \sigma X + \mu$  platí  $Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu_S)$ . Môžeme teda povedať, že proces  $Z_\alpha$  zo SDR 2.18 uvažujeme v štandardizovanom tvare  $\sigma = 1$ . Postupujeme nasledovne:

1. Vektor  $\mathbf{Y}$  rozdelíme na vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{X}$ . Využijeme metódu uvedenú v (Orzeł a Wyłomańska, 2011), ktorá očistí vektor  $\mathbf{Y}$  o všetky konštantné obdobia. Presnejšie, jednotlivé zložky vektora  $\mathbf{E}$  sú dané predpisom  $E_j = t_i - t_{i-k}$ , ak pre všetky  $m \in \{0, \dots, k\}$  platí  $Y(t_i) = Y(t_{i-m})$ , pričom  $Y(t_i) \neq Y(t_{i+1})$ . Priamo dostávame  $X_j = Y(t_i)$  ak  $Y(t_i) \neq Y(t_{i-1})$ . Vektor  $\mathbf{E}$  teraz predstavuje prírastky stabilného subordinátora  $T_\kappa$  s parametrom  $\kappa$ , ktorý tvorí



Obr. 2.5: Subordinácia stabilného procesu  $X_\alpha$  typu OU s počiatkom  $X(0) = 0.02$  a parametrami  $\theta = 0.5$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu_S = 0$  pomocou inverzného stabilného subordinátora  $E_\kappa$  s parametrom  $\kappa = 0.8$  na subordinovaný stabilný proces  $X_\alpha(E_\kappa)$ .

inverzný subordinátor  $E_\kappa$ . Vektor  $\mathbf{X}$  naopak predstavuje nesubordinovaný stabilný proces  $X_\alpha$  typu OU.

2. Začneme odhadom parametra  $\kappa$ , na ktorý využijeme chovanie sa distribučnej funkcie  $F_T(x)$  stabilného subordinátora  $T_\kappa$  s parametrom  $\kappa$  pri pravom chvoste

$$1 - F_{T_\kappa}(x) \sim x^{-\kappa}.$$

Stačí preložiť empirický pravý chvost  $1 - \hat{F}_{n,\mathbf{E}}(x)$  mocninovou funkciou  $ax^{-\kappa}$  pomocou metódy najmenších štvorcov. Alternatívne spôsoby odhadu, ako napríklad Hillov odhad, je možné nájsť v (Janczura a Wyłomańska, 2009).

3. Pokračujeme odhadom parametrov  $\mu$  a  $\theta$ . Z dekompozície z kroku 1 vidíme, že vektor  $\mathbf{X}$  je definovaný pomocou 2.19. Ak zoberieme  $\Delta t = 1$ , ide o proces  $AR(1)$ , čo je špeciálny prípad procesu  $ARMA(p, q)$ , kde  $p = 1, q = 0$ . Môžeme teda využiť periodogram z časti 1.2.3, pričom využijeme spektrálnu funkciu procesu  $ARMA(1, 0)$  (Mikosch a kol., 1995). Hlavná výhoda tohto odhadu je jeho nezávislosť na parametroch stabilného procesu  $Z_\alpha$ .
4. Po odhade parametrov  $\mu$  a  $\theta$  obdržíme vektor reziduí  $\mathbf{Z}$  z 2.19 ako  $Z_j = X_j - (1 - \theta)X_{j-1} - \theta\mu$ , ktoré sú i.i.d., symetrické a stabilné s parametrom  $\alpha$ . Spravíme dva rôzne odhady. V prvom predpokladáme  $\beta = 0$  a  $\mu_S = 0$  (nemýliť s driftom  $\mu$  procesu  $X_\alpha$ ). Využijeme metódu uvedenú v (Borak a kol., 2011), ktorá využíva lineárnu regresiu. Predpis:

$$\log \left( -\log |\Psi_Z(u)|^2 \right) = \log(2\sigma^\alpha) + \alpha \log|u|,$$

sa odhadne metódou najmenších štvorcov, pomocou empirickej charakteristickej funkcie:

$$\hat{\Psi}_{n,\mathbf{Z}}(u) = 1/n \sum_{j=1}^n \exp\{iuZ_j\}.$$

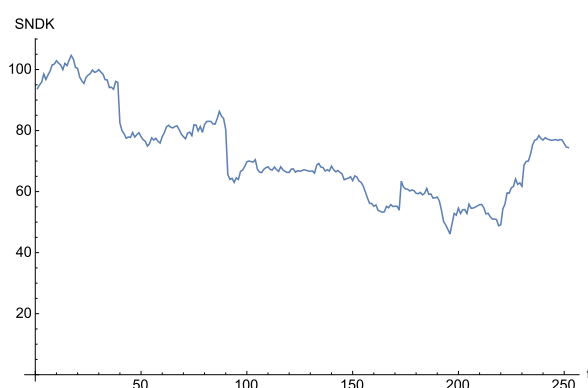
V druhom odhade odhadneme všetky parametre stabilného rozdelenia pomocou metódy maximálnej vierohodnosti (Borak a kol., 2011).

5. Na záver treba zmeniť odhady parametrov  $\hat{\theta}$  a  $\hat{\sigma}$ , ktoré sú citlivé na voľbu veľkosti kroku  $\Delta t$ . Nech sú  $\hat{\theta}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\alpha}$  odhady, ktoré sme získali vyššie spomenutou procedúrou. Potom sú konečné parametre tvaru  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_1 \Delta t$  a  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \Delta t^{1/\hat{\alpha}}$ .

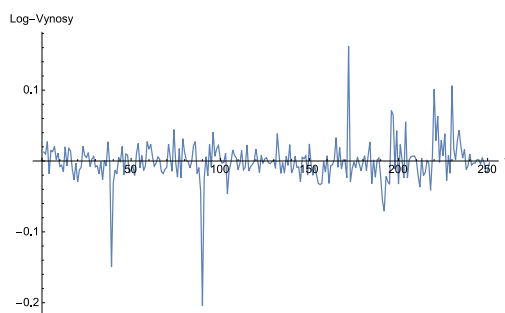
# Kapitola 3

## Ilustračné príklady

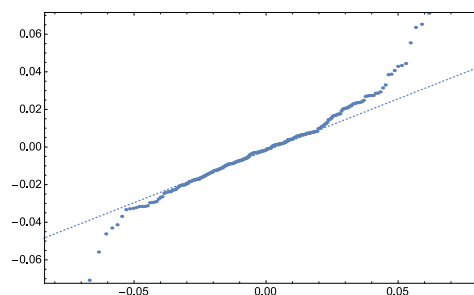
V tejto časti budeme aplikovať vyššie uvedené modely na reálne dáta. Všetky odhady a ilustrácie, spolu s tými, ktoré neboli v práci uvedené, je možné nájsť v priloženom sprievodnom dokumente. Začneme modifikáciou Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre mfBm, ktorou oceníme šesťmesačné európske call opcie na cenu akcií spoločnosti "SanDisk Corp". Potom prejdeme na modelovanie sadzieb PRIBORu nami predstaveným subordinovaným stabilným procesom typu OU. Všetky ceny sú uvedené v EUR.



(a) Cena akcií SNDK



(b) Logaritmické výnosy



(c) Q-Q graf logaritmických výnosov

Obr. 3.1: Vývoj ceny akcií SanDisk Corp, spolu s grafom ich logaritmických výnosov s príslušným Q-Q grafom.

Min	Max	Výber. priemer	Smerodajná odchýlka	Jarque- Bera test	Šikmosť	Špicatosť
-0.204	0.162	-0,001	0.029	$\leq 0.001$	-0.731	19.302

Tabuľka 3.1: Základné štatistiky logaritmických výnosov analyzovaných dát spolu s p-hodnotou Jarque-Beraovho testu.

### 3.1 Zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb

Pre ilustráciu metódy predstavenej v časti 1.3.2 oceníme šesťmesačnú európsku call opciu vypísanú dňa 15. 10. 2015 s maturitou  $T = 15.4.2016$  na cenu akcií "SanDisk Corp", definovanej na burze symbolom "SNDK". Použijeme predstavenú modifikáciu Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre zmiešaný frakcionálny Brownov pohyb z časti 1.3.2. Cenu stanovíme ku dňu  $t = 12.11.2015$ . Dáta pozostávajú z denných pozorovaní zatváracích cien SNDK v období od 13. 11. 2014 do 12. 11. 2015; spolu  $n = 252$  pozorovaní. Dáta sme obdržali vstavanou funkciou *FinancialData* systému *Wolfram Mathematica*. Tento časový rad spolu s jeho logaritmickými výnosmi môžeme vidieť na obrázku 3.1. Uviedli sme taktiež Q-Q graf spomenutých logaritmických výnosov, na ktorom môžeme pozorovať výskyt ťažkých chvostov. Základné štatistiky logaritmických výnosov sme zhrnuli v tabuľke 3.1. Vysoká špicatosť spolu s p-hodnotou Jarque-Beraovho testu blízko nule nám dáva dodatočné podklady na zamietnutie normálneho rozdelenia logaritmických výnosov a teda aj využitia bežného Black-Scholesovho vzorca.

Ako prvý sme pomocou DFA analýzy z časti 1.2.2 odhadli Hurstov parameter  $H$ . Metódu DFA zmeníme iba vo voľbe veľkosti blokov. Namiesto mocnín dvojky zoberieme postupnosť  $D = \{D_i\}_{i=1, \dots, d}$  celočíselných deliteľov čísla  $n$ , pričom musí platiť  $D_i > 2$  a  $n/D_i \geq 3$  pre všetky  $i = 1, \dots, d$ . Keďže na odhad využívame lineárnu regresiu, budeme vyžadovať aby  $d \geq 10$ . Pre naše pozorovania platí  $d = 14$ . Na odhad volatility v intervale  $[T_1, T_2]$  (v našom prípade  $[18.5.2015, 12.11.2015]$ ) využijeme vzorec

$$\sigma^2 = \frac{1}{T_2 - T_1 + T_2^H - T_1^H} \sum_{j=1}^{n-1} \log \left( \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} \right)^2 \quad (3.1)$$

kde  $T_1 = t_1 < \dots < t_n = T_2$  (Sun, 2013). Na výpočty v tomto príklade budeme využívať konvenciu pracovných dní. To znamená, že platí  $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1/252$  pre všetky  $i = 2, \dots, n$ .

Dostávame odhady  $\hat{H} = 0.659$  a šesťmesačnú volatilitu  $\hat{\sigma}^2 = 0.097$ . Za konštantnú bezrizikovú úrokovú mieru berieme  $r = 0.0035$ , čo je výnos šesťmesačného amerického bezkupónového štátneho dlhopisu (anglicky U.S. T-bill) prevzatý zo stránok amerického ministerstva financií<sup>1</sup> (anglicky U.S. Department of Treasury). Údaje pre rok 2015 sú uvedené v priloženom súbore *UST-Bill2015.xls*. Posledná hodnota našich dát je rovná  $S_{12.11.2015} = 74.61$ . Výsledné ceny sú prezentované v tabuľke 3.2. Skutočné ceny boli prevzaté zo stránok *Yahoo Finance*<sup>2</sup>.

<sup>1</sup><https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yieldYear&year=2015>

<sup>2</sup><https://finance.yahoo.com/q/op?s=SNDK&date=1460678400>

Realizačná cena	Odhadnutá cena opcie	Skutočná cena opcie
65.0	9.66	14.4
67.5	7.40	4.65
70.0	5.37	10.1
72.5	3.67	NA
75.0	2.34	4.85
77.5	1.39	2.80
80.0	0.77	1.75
82.5	0.40	2.00

*Pozn.:* NA údaje neboli dostupné.

Tabuľka 3.2: Odhadnuté ceny európskych call opcií spolu so skutočnými hodnotami pre realizačné ceny  $\{65, 67.5, \dots, 82.5\}$ .

Z tabuľky 3.2 vidíme, že naša modifikácia Black-Scholesovho vzorca podceňuje cenu európskych call opcií kótovaných na burze. To je zapríčinené našim predpokladom nulových transakčných poplatkov. Druhým významným aspektom, ktorý neberieme v úvahu, je dopyt. Ten spôsobuje nekonzistenciu reálnych cien, ktorú môžeme pozorovať pre realizačné ceny 67.5 a 82.5. Presnejšie, cena opcie s realizačnou cenou 67.5 sa nezmenila počas celej svojej životnosti.

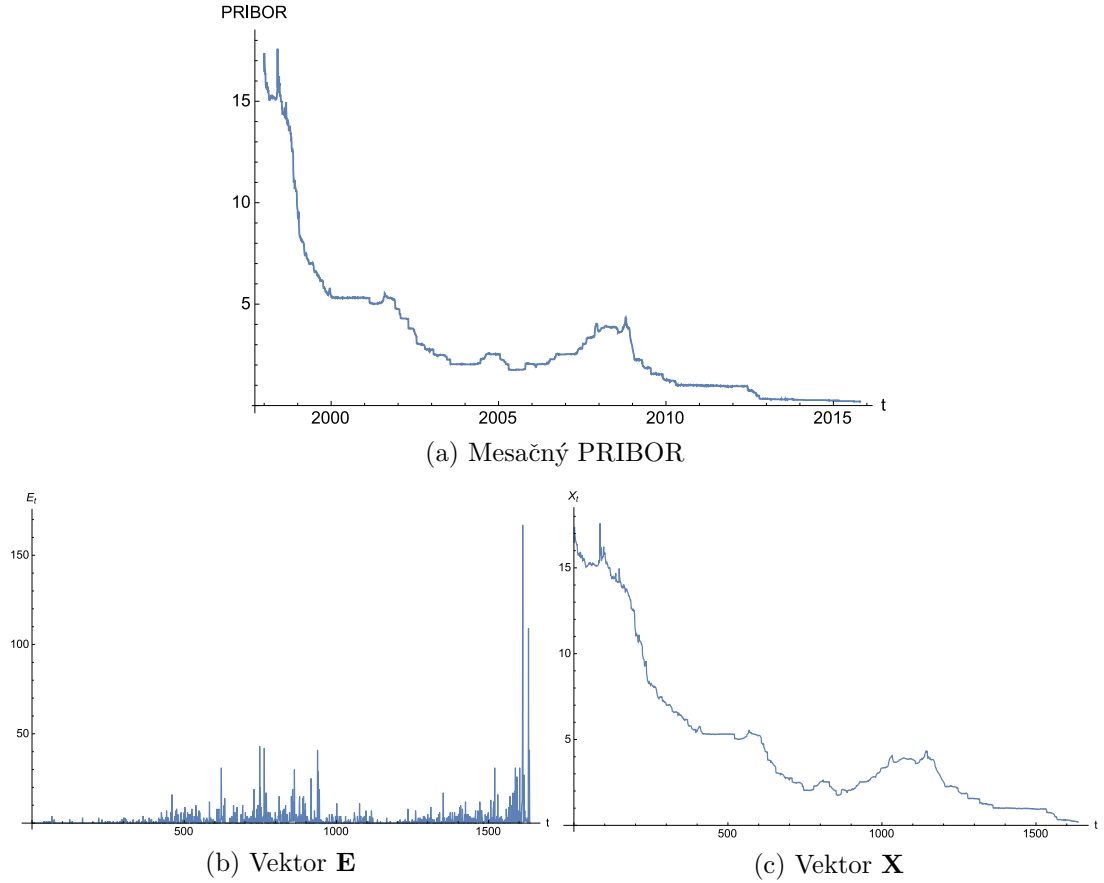
*Poznámka 3.1.* V tejto práci sme uviedli základný tvar modifikácie Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre mBm, ktorý je možné použiť ako základ na odvodenie komplikovanejších tvarov. Napríklad oceňovanie menových opcií (Sun, 2013) alebo opčných listov (po anglicky equity warrants) (Xiao a kol., 2012). Je možné ich odvodiť s malými úpravami postupom analogickým nášmu.

## 3.2 Modelovanie sadzieb PRIBOR

Model predstavený v časti 2.4 budeme ilustrovať na denných pozorovaniach mesačného PRIBORu (Prague Interbank Offered Rate). Berieme do úvahy obdobie od 2.1.1998 do 16.11.2015; spolu 4508 pozorovaní. Dáta boli prevzaté z oficiálnych stránok Českej národnej banky<sup>3</sup> a sú znázornené na obrázku 3.2. Hodnoty pozorovaní je možné nájsť v priloženom súbore *PRIBOR1998-2015.xls*. Na obrázku 3.2 si môžeme všimnúť dlhých konštantných období, napríklad v rokoch 2000 a 2014, čo nás motivuje k využitiu subordinácie. Odhadneme a porovnáme šesť rôznych modelov:

1. Subordinovaný stabilný proces typu OU s parametrom  $\alpha$
2. Subordinovaný stabilný proces typu OU s parametrom  $\alpha$ , pričom  $\beta = 0$ ,  $\mu_S = 0$
3. Subordinovaný Vašíčkov model
4. Stabilný proces typu OU s parametrom  $\alpha$

<sup>3</sup>[https://www.cnb.cz/en/financial\\_markets/money\\_market/pribor/daily.jsp](https://www.cnb.cz/en/financial_markets/money_market/pribor/daily.jsp)



Obr. 3.2: Denné pozorovania mesačného PRIBORu spolu s dekompozíciou na vektor  $\mathbf{E}$  a vektor  $\mathbf{X}$ .

5. Stabilný proces typu OU s parametrom  $\alpha$ , pričom  $\beta = 0$ ,  $\mu_S = 0$

6. Vašíčkov model.

Opíšeme iba postup odhadovania subordinovaných procesov, nakoľko je postup pri ich nesubordinovaných prípadoch analogický, s rozdielom vynechania dekompozičného kroku. Riadime sa postupom predstaveným v časti 2.4. Vektor pozorovaní  $\mathbf{Y}$  očistíme o konštantné obdobia, čím získame vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{X}$  znázornené na obrázku 3.2. Na obrázku 3.2.(b) vidíme prírastky stabilného subordinátora  $T_\kappa$  tvoriaceho proces  $E_\kappa$ . Stabilný subordinátor je v skutočnosti stabilný proces s  $\beta = 1$ . Využijeme metódu opísanú v druhom kroku postupu z časti 2.4, čím dostaneme odhad  $\hat{\kappa} = 0.738$ . Ten je spoločný pre všetky nami použité subordinované modely 1, 2 a 3.

Na obrázku 3.2.(c) môžeme stále pozorovať obdobia, ktoré sa zdajú byť nemenné, obsahujú však veľmi nízke výkyvy. Niektoré metódy posudzujú obdobia v ktorých sa cena nevychýli nad určitú hladinu, napríklad neprekročí  $X_t \pm 0.001$ , za konštantné. Nakoľko sú nami použité dáta zaokrúhlené na dve desatinné miesta, berieme do úvahy iba skutočne konštantné obdobia. Pozreli sme sa taktiež na Q-Q graf logaritmickej výnosov vektora  $\mathbf{X}$ , ktorý je znázornený na obrázku 3.3. Pozorujeme výskyt ťažkých chvostov čo znamená že Vašíčkov model nie je vhodný.

Model	$\hat{\kappa}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}_S$	$\hat{\sigma}$
Model 1	0.7382	4.77	0.0046	1.2333	0.1629	-0.004	0.0152
Model 2	0.7382	4.77	0.0046	1.3288	—	—	0.0209
Model 3	0.7382	0.1627	0.0022	—	—	—	0.0957
Model 4	—	3.1477	0.0028	1.0457	0.3719	0.0197	0.0047
Model 5	—	3.1477	0.0028	1.2889	—	—	0.0084
Model 6	—	1.2071	0.0019	—	—	—	0.0578

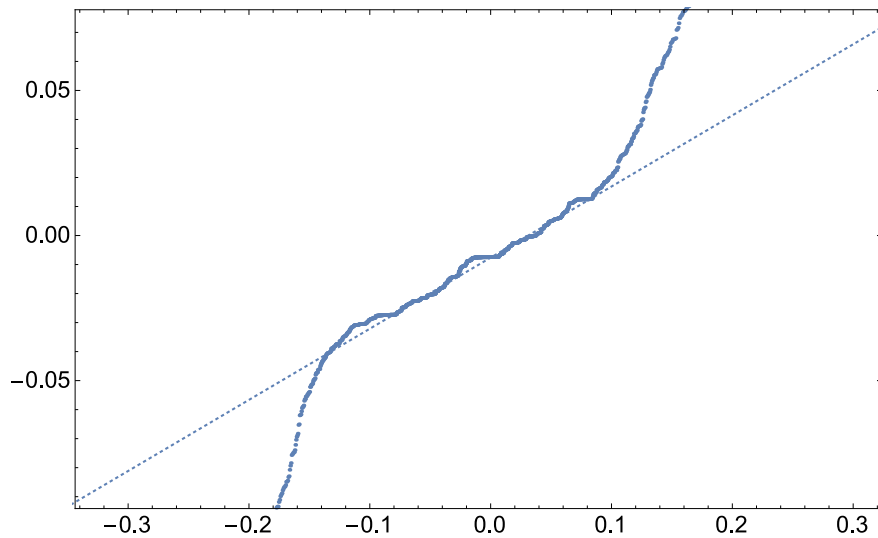
Tabuľka 3.3: Odhadnuté parametre modelov.

Pokračujeme odhadom parametrov  $\theta$  a  $\mu$  pomocou vektora  $\mathbf{X}$ . Tento odhad býva pre dlhšie časové rady výpočetne náročnejší, nakoľko sa zvýši počet Fourierových frekvencií, v ktorých treba vypočítvať hodnotu periodogramu. Dostávame odhady  $\hat{\mu} = 4.77$  a  $\hat{\theta} = 0.0046$ , čo je veľmi nízka hodnota parametra návratu ku dlhodobému priemeru. Avšak, pri pohľade na obrázok 3.2.(c) skutočne nemôžeme pozorovať hodnotu, ku ktorej by mala časová rada tendenciu sa vracieť. Tieto dva odhady sú spoločné pre oba subordinované stabilné modely 1 a 2.

Na odhad zvyšných parametrov modelu 1 využijeme metódu maximálnej vierohodnosti. Systém Wolfram Mathematica ju využíva ako predvolenú metódu funkcie *EstimatedDistribution*. Dostávame odhady  $\hat{\alpha} = 1.2333$ ,  $\hat{\beta} = 0.1629$ ,  $\hat{\mu}_S = -0.004$  a  $\hat{\sigma} = 0.0152$ . Zvyšné parametre  $\hat{\alpha} = 1.329$  a  $\hat{\sigma} = 0.0209$  modelu 2 sme odhadli metódou najmenších štvorcov.

Všetky parametre subordinovaného Vašíčkovho modelu, okrem  $\kappa$ , boli odhadnuté pomocou vstavanej funkcie *FindProcessParameters* systému Wolfram Mathematica taktiež využitím metódy maximálnej vierohodnosti. Pri kalibrácii modelov 4, 5 a 6 sa postupuje analogicky, s výnimkou kroku dekompozície. Odhady parametrov všetkých šiestich modelov sú zapísané v tabuľke 3.3.

Jednotlivé modely porovnáme pomocou Kolmogorovho-Smirnovovho testu dobrej zhody aplikovaného na vektor reziduí  $\mathbf{Z}$  jednotlivých modelov. Hodnoty Kol-



Obr. 3.3: Q-Q graf pre logaritmicke výnosy očisteného vektora  $\mathbf{X}$ .

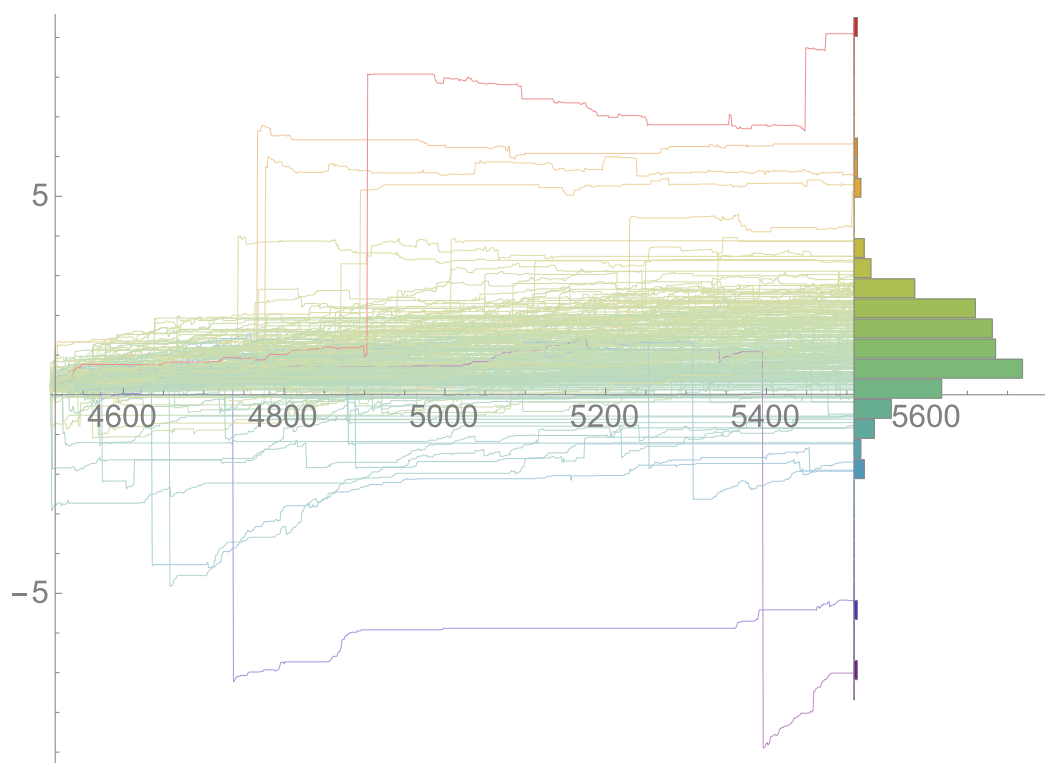
mogorovej-Smirnovej štatistiky

$$D_n = \sqrt{n} \sup \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right|,$$

pre všetky modely sú zapísané v tabuľke 3.4. Vidíme, že aplikácia stabilných Lévyho procesov spolu so subordináciou v modeloch typu OU vedie k signifikantne lepšiemu výsledku. Na obrázku 3.4 vidíme simuláciu 250 trajektórií odhadnutého subordinovaného stabilného modelu typu OU 1000 dní vopred, spolu s histogramom rezovej distribúcie v poslednom bode.

Model	Hodnoty K-S štatistiky
Model 1	2.3159
Model 2	7.6347
Model 3	11.675
Model 4	5.0311
Model 5	14.579
Model 6	23.132

Tabuľka 3.4: Hodnoty Kolmogorovovej-Smirnovovej štatistiky pre odhadnuté modely typu OU.



Obr. 3.4: Simulácia 250-ich trajektórií odhadnutého subordinovaného stabilného modelu typu OU 1000 dní vopred.



# Záver

V tejto práci sme pojednávali o alternatívach, ktorými je možné nahradiť Brownov pohyb v stochastických finančných modeloch. Viedli nás k tomu rôzne empirické štúdie, ktoré poukázali na často nereálne predpoklady spojené s jeho používaním.

V prvej kapitole sme predstavili *frakcionálny Brownov pohyb*, ktorého vlastnosť dlhodobej závislosti pre hodnoty Hurstovho parametra  $1/2 < H < 1$  umožňuje, aby mala na vývoj ceny aktíva vplyv celá pozorovaná trajektória. Na základe simulačnej štúdie sme zistili, že *R/S* analýza, ktorá býva v praxi najčastejšie využívaná na odhad *Hurstovho parametra*  $H$ , je súčasne tiež najmenej spoľahlivou z troch predstavených metód. Najlepšie výsledky poskytuje *periodogram*, avšak z dôvodu jeho vychýlenia pri nekorektnom zvolení predpokladaného modelu sme sa v našom ilustračnom príklade nakoniec rozhodli využiť metódu *DFA*. Použitím modifikácie Black-Scholesovho oceňovacieho vzorca pre mfBm sme ocenili šesťmesačné európske call opcie na ceny akcií SanDisk Corp pre rôzne realizačné ceny.

Aparát *Lévyho procesov* sme využili hlavne pri riešení problémov s rozdelením logaritmických výnosov finančných dát a problémov zhlukovania volatility. Využitím *stabilnej distribúcie*, ktorá je známa svojimi ťažkými chvostmi, a *subordinácie*, ktorá vysvetľuje výskyt konštantných období v pozorovaniach, sme vytvorili model *Ornstein-Uhlenbeckovho* typu na modelovanie úrokových sadzieb. Opísali sme postup kalibrácie, ktorý sme aplikovali na reálnych dátach PRIBORu za posledných 17 rokov. Dosiahli sme takmer deväťdesiatpercentný pokles hodnoty Kolmogorovej-Smirnovovej štatistiky, čím sme ukázali, že náš model vedie k lepším výsledkom než štandardný *Vašíčkov model*. Jednou z vecí, ktoré je potrebné mať na mysli pri jeho aplikácii, je možnosť výskytu záporných hodnôt. Ako sme však spomenuli v diskusii pred jeho zavedením, niektoré európske banky záporné úrokové miery už dokonca implementovali.

Elektronické prílohy *SprievodnýDokument.nb* (spustiteľné) a *SprievodnýDokument.pdf* (len pre informáciu) obsahujú doplnujúce informácie a výpočtové postupy, ktoré rozširujú a hlbšie detailizujú obsah predloženej práce.

# Literatúra

- BARNDORFF-NIELSEN, O. E. a SHEPHARD, N. (2001). Non-gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **63**(2), 167–241.
- BAYRAKTAR, E., HORST, U. a SIRCAR, R. (2006). A limit theorem for financial markets with inert investors. *Mathematics of Operations Research*, **31**(4), 789–810.
- BERAN, J. (1984). *Maximum likelihood estimation for Gaussian processes with long-range dependence*. In: Abstracts Book, 16th European Meeting of Statisticians, Marburg, Germany.
- BERAN, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes. Monographs on statistics and applied probability*. Chapman & Hall, New York. ISBN 0-412-04901-5.
- BERTOIN, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-56243-0.
- BIAGINI, F., HU, Y., ØKSENDAL, B. a ZHANG, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-1-85233-996-8.
- BLACK, F. a SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, **81**(3), 637–654.
- BORAK, S., MISIOREK, A. a WERON, R. (2011). *Statistical Tools for Finance and Insurance*, chapter Models with Heavy-tailed Asset Returns. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-18062-0.
- CHEN, J., REN, F. a QIU, W. (2004). Option pricing of a mixed fractional–fractional version of the Black–Scholes model. *Chaos, Solitons and Fractals*, **21**, 1163–1174.
- CHERDITO, P. (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance Stoch.*, **7**, 533–553.
- CHERIDITO, P. (2001). Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli*, **7**(6), 913–934.
- CHERIDITO, P. (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance and Stochastics*, **7**(4), 533–533.

- CONT, R. a TANKOV, P. (2004). *Financial Modeling with Jump Processes*. CRC Press, Boca Raton. ISBN 1-58488-413-4.
- DA PRATO, G. a JABCZYK, J. (1996). *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*. Cambridge Universal Press, Cambridge. ISBN 9780521579001.
- DAHLHAUS, R. (1989). Efficient parameter estimation for self-similar processes. *The Annals of Statistics*, **17**(4), 1749–1766.
- DUDLEY, R. M. a NORVAISA, R. (1998). An introduction to p-variation and Young integrals. Lecture Notes.
- GRAF, H. P. (1983). *Long-Range correlations and estimation of the self-similarity parameter*. PhD thesis, ETH, Zürich.
- GUO, Z. a YUAN, H. (2014). Pricing european option under the time-changed mixed Brownian-fractional Brownian model. *Physica A*, **406**, 73–79.
- HURST, H. E. (1951). Long-term storage capacity in reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, **116**, 770–799.
- JANCZURA, J. a WYŁOMAŃSKA, A. (2009). Subdynamics of financial data from fractional Fokker-Planck equation. *Acta Physica Polonica B*, **40**(5), 1341–1353.
- KINGMAN, J. F. C. (1972). *Regenerative Phenomena*. John Wiley & Sons, Chichester. ISBN 0-471-47905-5.
- KORN, R., KORN, E. a KROISANDT, G. (2010). *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. CRC Press, Boca Raton. ISBN 978-1-420-07618-9.
- LO, A. W. (1991). Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, **59**(5), 1279–313.
- LORETAN, M. a PHILLIPS, P. C. B. (1994). Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets. *Journal of Empirical Finance*, **1**(2), 211–248.
- MAGDZIARZ, M. a WERON, A. (2007). Competition between subdiffusion and Lévy flights: A Monte Carlo approach. *Physical Review E*, **75**(5), 056702.
- MANDELBROT, B. (1975). Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **31**, 271–285.
- MANDELBROT, B. B. a VAN NESS, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, **10**(4), 422–437.
- MARINUCCI, D. a ROBINSON, P. M. (1999). Alternative forms of fractional Brownian motion. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **80**, 111–122.
- MEERSCHAERT, M. M. a SCHEFLER, H. P. (2004). Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. *Journal of Applied Probability*, **41**(3), 623–638.

- MIELNICZUK, J. a WOJDYLLO, P. (2007). Estimation of Hurst exponent revisited. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4510–4525.
- MIKOSCH, T., GADRIC, T., KLÜPPELBERG, C. a ALDER, R. J. (1995). Parameter estimation for ARMA models with infinite variance innovations. *The Annals of Statistics*, **23**(1), 305–326.
- MISHURA, Y. S. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-540-75872-3.
- ORZEL, S. a WYŁOMAŃSKA, A. (2011). Calibration of the subdiffusive arithmetic Brownian motion with tempered stable waiting-times. *Journal of Statistical Physics*, **143**(3), 447–454.
- PENG, C., BULDYREV, S., HAVLIN, S., SIMONS, M., STANLEY, H. a GOLDBERGER, A. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Rreview E*, **49**(2), 1685–1689.
- PETERS, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons, New York. ISBN 978-0471585244.
- ROGERS, L. C. G. (1997). Arbitrage with fractional Brownian motion. *Mathematical Finance*, **7**(1), 95–105.
- ROSTEK, S. a SCHÖBEL, R. (2013). A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling. *Economic Modeling*, **30**, 30–35.
- SATO, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0-521-55302-5.
- SCHOUTENS, W. (2003). *Lévy Processes in Finance*. John Wiley & Sons, Chichester. ISBN 0-470-85156-2.
- SHIRYAYEV, A. N. (1998). On arbitrage and replication for fractal models. Research Report 20.
- SUN, L. (2013). Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion. *Physica A*, **392**, 3441–3458.
- TAQQU, M., TEVEROVSKY, V. a WILLINGER, W. (1995). Estimators for long-range dependence: empirical study. *Fractals*, **3**, 785–798.
- VÁŠÍČEK, A. O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.
- VANDEWALLE, N., AUSLOOS, M. a BOVEROUX, P. (1997). *Detrended Fluctuation Analysis of the Foreign Exchange Market*. Proceedings of Econophysics Workshop, Budapest, Hungary.
- WANG, X., ZHU, E., TANG, M. a YAN, H. (2010). Scaling and long-range dependence in option pricing ii: Pricing european option with transaction costs under the mixed Brownian-fractional Brownian model. *Physica A*, **389**(3), 445–451.

- WERON, R. (2001). Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*, **31**, 285–299.
- WILLINGER, W., TAQQU, M. S., LELAND, W. E. a WILSON, D. V. (1995). Self-similarity in high-speed packet traffic: Analysis and modeling of ethernet traffic measurements. *Statistical Science*, **10**(1), 67–85.
- XIAO, W. L., ZHANG, W. G., ZHANG, X. a ZHANG, X. (2012). Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm. *Physica A*, **391**, 6418–6431.
- ZILI, M. (2006). On the mixed fractional Brownian motion. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **2006**, 1–9.

# Zoznam obrázkov

1.1	Trajektórie fBm pre $H = 1/4$ , $H = 1/2$ , $H = 3/4$ vytvorené pomocou vstavanej funkcie <i>FractionalBrownianMotion</i> systému Wolfram Mathematica. . . . .	5
1.2	Pox-plot pre odhad parametra $H$ využitím R/S analýzy na prekryvajúcich sa blokoch pre simuláciu veľkosti $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad $\hat{H}_o = 0.7659$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu $H = 0.8$ . . . . .	9
1.3	Pox-plot pre odhad parametra $H$ využitím R/S analýzy na neprekryvajúcich sa blokoch pre simuláciu veľkosti $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad $\hat{H}_d = 0.767$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu $H = 0.8$ . . . . .	10
1.4	DFA metóda odhadu parametra $H$ pre simuláciu veľkosti $n = 2^{11} = 2048$ . Sklon červenej priamky predstavuje náš odhad $\hat{H}_{dfa} = 0.792$ , sklon zelenej priamky skutočnú hodnotu $H = 0.8$ . . . . .	12
1.5	Odhad parametra $H$ simulovaného fBm dĺžky $n = 2^{11} = 2048$ pomocou periodogramu. Červená čiara predstavuje odhad $\hat{H}_w = 0.792$ s 95%-ným asymptotickým konfidenčným intervalom vyznačeným prerušovanými čiarami, vertikálna zelená čiara označuje skutočnú hodnotu $H = 0.8$ . . . . .	13
1.6	RMSE všetkých spomenutých metód odhadu Hurstovho parametra $H$ $Sim = 500$ trajektorií frakcionálneho Brownovho pohybu dĺžky $n = 2048$ . . . . .	17
1.7	Box-ploty odchýlok odhadov R/S analýzy založenej na neprekryvajúcich sa blokoch pri $r = 2048$ , $Sim = 500$ pre hodnoty Hurstovho parametra rovné $H = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ . . . . .	18
2.1	Trajektórie Poissonovho procesu s intenzitami $\lambda = 0.5, \lambda = 1, \lambda = 1.5$ pre rovnaký RandomSeed. . . . .	34
2.2	Trajektórie zloženého Poissonovho procesu s intenzitami $\lambda = 0.5, \lambda = 1, \lambda = 1.5$ a postupnosť $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. náhodných veličín exponenciálne rozdelenie s parametrom $\eta$ pre rovnaký RandomSeed. . . . .	35
2.3	Subordinácia mfBm $M^H$ z definície 10 s parametrom $H = 0.85$ pomocou inverzného stabilného subordinátora s parametrom $\alpha = 0.8$ na subordinovaný proces. . . . .	41
2.4	Trajektórie gausovského OU procesu s počiatkom $X(0) = 0.02$ a parametrami $\theta = 0.5, \mu = 0.04, \sigma = 0.02$ . . . . .	42

2.5	Subordinácia stabilného procesu $X_\alpha$ typu OU s počiatkom $X(0) = 0.02$ a parametrami $\theta = 0.5$ , $\mu = 0.04$ , $\sigma = 0.02$ , $\alpha = 1.5$ , $\beta = 0$ , $\mu_S = 0$ pomocou inverzného stabilného subordinátora $E_\kappa$ s parametrom $\kappa = 0.8$ na subordinovaný stabilný proces $X_\alpha(E_\kappa)$ . . . . .	43
3.1	Vývoj ceny akcií SanDisk Corp, spolu s grafom ich logaritmických výnosov s príslušným Q-Q grafom. . . . .	45
3.2	Denné pozorovania mesačného PRIBORu spolu s dekompozíciou na vektor $\mathbf{E}$ a vektor $\mathbf{X}$ . . . . .	48
3.3	Q-Q graf pre logaritmické výnosy očisteného vektora $\mathbf{X}$ . . . . .	49
3.4	Simulácia 250-ich trajektórií odhadnutého subordinovaného stabilného modelu typu OU 1000 dní vopred. . . . .	50

# Zoznam tabuliek

1.1	Porovnanie času potrebného na výpočet v systéme Wolfram Mathematica 10.2 a presnosť odhadov Hurstovho parametra $H$ pre všetky spomenuté metódy aplikované na simuláciu fBm s $H = 0.8$ a dĺžky $n = 2048$ . Použitý počítač používa operačný systém Microsoft Windows 7, <i>Intel Core i3 CPU M 330 @ 2.13Ghz</i> s <i>4GB RAM</i> . . . . .	15
2.1	Momenty rezovej distribúcie Poissonovho procesu v bode $t \geq 0$ . . . . .	33
2.2	Momenty rezovej distribúcie zloženého Poissonovho procesu v bode $t \geq 0$ , kde má postupnosť $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. náhodných veličín exponenciálne rozdelenie s parametrom $\eta$ . . . . .	34
2.3	Momenty rezovej distribúcie Gamma procesu v bode $t \geq 0$ . . . . .	36
2.4	Momenty rezovej distribúcie inverzného gaussovského procesu v bode $t \geq 0$ . . . . .	36
3.1	Základné štatistiky logaritmických výnosov analyzovaných dát spolu s p-hodnotou Jarque-Beraovho testu. . . . .	46
3.2	Odhadnuté ceny európskych call opcií spolu so skutočnými hodnotami pre realizačné ceny $\{65, 67.5, \dots, 82.5\}$ . . . . .	47
3.3	Odhadnuté parametre modelov. . . . .	49
3.4	Hodnoty Kolmogorovovej-Smirnovovej štatistiky pre odhadnuté modely typu OU. . . . .	50